

Resumen Auxiliar Extra Examen: Polinomios

Profesora: Natacha Astromujoff

Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez & Ignacio Dagach Abugattas

Definición

Sea K cuerpo. Un **polinomio** es una expresión:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{con } a_k \in K$$

El conjunto de polinomios sobre K se denota $K[x]$.

Propiedades Básicas

- **Igualdad:**
Coinciden todos los coeficientes
- **Grado** ($\text{gr}(p)$):
Máximo k tal que $a_k \neq 0$
- **Mónico:** Coeficiente principal $a_n = 1$
- **Polinomio nulo:**
Todos $a_k = 0$ (grado no definido)

Operaciones

- **Suma:**

$$(p+q)(x) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) x^k$$

$$\text{gr}(p+q) \leq \max\{\text{gr}(p), \text{gr}(q)\}$$

- **Producto:**

$$(p \cdot q)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

$$\text{gr}(p \cdot q) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$$

Teorema del Resto

Para cualquier $p \in K[x]$ y $c \in K$, existe $q \in K[x]$:

$$p(x) = (x - c) \cdot q(x) + r$$

donde el resto $r = p(c)$.

Raíces

$c \in K$ es **raíz** de p si $p(c) = 0$.

Equivalentemente: $(x - c)$ divide a $p(x)$.

Propiedades:

- Un polinomio no nulo de grado n tiene **a lo más** n raíces
- Si p , de grado n , tiene **más de** n raíces $\implies p = 0$
- Si p y q coinciden en $n + 1$ puntos distintos y $\text{gr}(p), \text{gr}(q) \leq n \implies p = q$

Teorema

Fundamental del Álgebra

Todo polinomio no constante con coeficientes en \mathbb{C} tiene al menos una raíz compleja.

Corolario: Si $p \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$ es raíz, entonces \bar{z} también es raíz.

Raíces Racionales

Sea $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ (mónico). Si $r = \frac{a}{b}$ (fracción irreducible) es raíz, entonces:

- $a \mid a_0$ (divide al término independiente)
- $b \mid 1$ (como es mónico, $b = \pm 1$)

$\implies r$ es **entero** y divisor de a_0 .