Auxiliar 11: Relaciones I

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez &
Ignacio Dagach Abugattas

P1. RELACIONES, SOLO RELACIONES

a) Sea $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ definida por: $x\mathcal{R}y \iff \dfrac{x+1}{y+1} \in \mathbb{N}$

i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de **orden**.

ii) Determine si $\mathcal{R}$ es **orden total**.

b) Sea $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}^2$ definida por: $(x,y)\mathcal{R}(u,v) \iff x \equiv_3 u \ \wedge \ y \equiv_5 v$

i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de **equivalencia**.

c) Sea $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}^3$ definida por: $(a,b,c)\mathcal{R}(x,y,z) \iff (a^2, b-c) = (x^2, y-z)$

i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de **equivalencia**.

d) Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sea $\mathcal{R}$ en $[0,1]$ definida por: $a_1\mathcal{R}a_2 \iff f(a_1) = f(a_2) \wedge g(a_1) = g(a_2)$.

i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de **equivalencia**.

e) Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función cualquiera.
Sea $\preceq$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por: $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff a_1 \leq a_2 \ \wedge \ f(-b_1) \leq f(-b_2)$

i) Demuestre que, f es inyectiva, si y solo si, $\preceq$ es **antisimétrica**.

f) Sea $J = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{N}, \sqrt{b} = \sqrt{a} + 1\}$.
Sea $\mathcal{R}$ en J definida por: $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff c \leq a$

i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de **orden**.

Resumen Auxiliar: Relaciones

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez & Ignacio Dagach Abugattas

Definición de Relación

Una relación es una tripleta $(A, B, \mathcal{R})$ donde $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.
Para $(a, b) \in A \times B$:

- $a\mathcal{R}b$ si $(a, b) \in \mathcal{R}$
- $a\not\mathcal{R}b$ si $(a, b) \notin \mathcal{R}$

A: dominio, B: codominio.

Propiedades de Relaciones

Sea $\mathcal{R}$ una relación en A:

- **Refleja:** $\forall x \in A,\ x\mathcal{R}x$
- **Simétrica:** $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- **Antisimétrica:** $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
- **Transitiva:** $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Relación de Equivalencia

Una relación $\mathcal{R}$ es de **equivalencia** si es:

- **Refleja**
- **Simétrica**
- **Transitiva**

Relación de Orden

Una relación $\mathcal{R}$ en A es de **orden** si es:

- **Refleja**
- **Antisimétrica**
- **Transitiva**

x precede a y si $x\mathcal{R}y$.
$x, y \in A$ son comparables si $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$

Clase de Equivalencia

Dado $a \in A$, se define:

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\}$$

Conjunto Cociente

Conjunto de clases de **equivalencia**:

$$A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$

Orden Total

Una relación de **orden** $\mathcal{R}$ es **total** si:

$$\forall x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$$

Divisibilidad

En $\mathbb{Z}$, se define $a \mid b$ si:

$$\exists q \in \mathbb{Z},\ b = qa$$

Si $a \mid b$, entonces:

- a divide a b
- b es divisible por a
- b es múltiplo de a

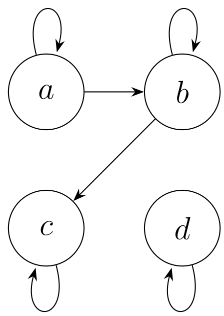
Congruencia Módulo n

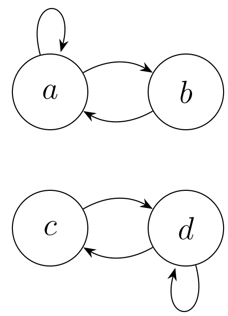
Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define:

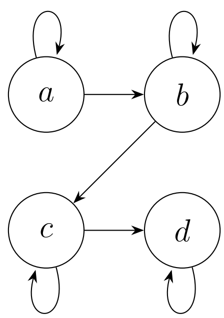
$$a \equiv_n b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z},\ a - b = qn$$

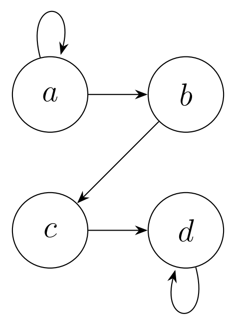
Ejercicio: Análisis gráfico de relaciones

Considere los siguientes cuatro dígrafos, cada uno representando una relación distinta sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.









Pregunta:
Para cada uno de los dígrafos anteriores, determine si la relación es:

- Reflexiva
- Simétrica
- Antisimétrica
- Transitiva

Recuerde que:

- Una relación es **reflexiva** si todo vértice tiene un bucle.
- Es **simétrica** si toda flecha (x, y) tiene también la flecha (y, x).
- Es **antisimétrica** si no hay dos vértices distintos con flechas en ambas direcciones.
- Es **transitiva** si siempre que hay (x, y) y (y, z), también está (x, z).