Auxiliar 9: Sumatorias I

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez &
Ignacio Dagach Abugattas

P1. M a t r a c a , s o l o M a t r a c a

a) Encuentre el valor de la suma:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

Para ello siga el siguiente esquema:

i) Calcule el valor de la suma de los términos de índice par.

ii) Calcule el valor de la suma de los términos de índice impar.

iii) Concluya

b) Encuentre el valor de la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} kk!$$

Hint: Aplique el más conocido teorema japonés con alguno de los términos presentes en la multipicación.

c) Encuentre el valor de la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \cdot \frac{1-k}{k(k+1)}$$

Hint: Escriba la fracción como una resta de fracciones, y busque aplicar la propiedad telescópica.

d) Encuentre el valor de la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k!(k^2+k+1)}{n+1}$$

e) Encuentre el valor de la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)}$$

Resumen Auxiliar: Sumatorias

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez & Ignacio Dagach Abugattas

Propiedades Básicas

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$ y $(a_k)_{k\geq m}$, $(b_k)_{k\geq m}$ sucesiones. Para todo $n \geq m$, se tiene:

- $\displaystyle\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k$
- Telescópica: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$
- Cambio de índices: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$

Sumas Conocidas

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- Geométrica: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, $r \neq 1$

Coeficientes Binomiales

Para $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Propiedades:

- Si $k > n \geq 0$, entonces $\binom{n}{k} = 0$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- Simetría: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Pascal: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
- Triángulo de Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- Binomio de Newton: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$