Resumen Auxiliar: Funciones

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez & Ignacio Dagach Abugattas

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ funciones.
Si f es biyectiva, denotamos su inversa como $f^{-1} : B \to A$.

Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad

- f es inyectiva si: $[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2] \;\vee\; [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$
- f es sobreyectiva si: $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$
- f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

Composición e Inversa

- Composición: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- Si f es biyectiva, existe $f^{-1} : B \to A$, tal que: $f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y$

Imagen y Preimagen

- Imagen: $f(A') = \{f(x) \in B \mid x \in A'\}$
- Preimagen: $f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$

Propiedades de la Composición

- Asociatividad:
  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- Si f, g inyectivas
  entonces $g \circ f$ es inyectiva.
- Si f, g sobreyectivas
  entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
- Si $g \circ f$ es inyectiva,
  entonces f es inyectiva
- Si $g \circ f$ es sobreyectiva,
  entonces g es sobreyectiva
- Si f, g biyectivas entonces
  $g \circ f$ es biyectiva y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Imagen y Preimagen

- $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A)$
- $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$
  Se tiene la igualdad si f es inyectiva