Auxiliar 7: Funciones I

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez &
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Funciones de conjuntos e Indicatrices

Sea E conjunto universo y sea $A \subseteq E$ un conjunto fijo. Se define la siguiente función:

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), \quad f(X) = X \triangle A$$

a) Demuestre que f es biyectiva.

b) Calcule f^{-1}.

c) Para todo $X \subseteq E$, se define su función indicatriz $\mathbb{1}_X : E \to \{0, 1\}$ como:

$$\mathbb{1}_X(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in X \\ 0 & \text{si } z \notin X \end{cases}$$

i) Sean $A, B \subseteq E$ con $\emptyset \neq B \subseteq A$. Demuestre que $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$.
ii) Sean $A, Z \subseteq E$ con $A \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$. Calcule $\mathbb{1}_A(Z)$ en términos de A y Z.
iii) Sea $A \subseteq E$ con $A \neq \emptyset$. Calcule $\mathbb{1}_A^{-1}(\{y\})$ para $y \in \{0, 1\}$.

P2. Inyectividad y propiedades

a) Sea $f : E \to F$ una función que satisface la propiedad:

$$\forall A, B \subseteq E, \quad (A \subseteq B \wedge A \neq B) \Rightarrow f(A) \neq f(B)$$

Probar que f es inyectiva.

b) Dada una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, diremos que cumple la propiedad $\mathcal{P}$ si:

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ m \neq 0 \Rightarrow f(n) < f(n + m)$$

i) Pruebe que toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple $\mathcal{P}$ es inyectiva.
ii) Si f cumple $\mathcal{P}$, ¿es necesariamente sobreyectiva? Justifique su respuesta o dé un contraejemplo.
iii) Pruebe que si f cumple $\mathcal{P}$ y es sobreyectiva, entonces $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Resumen Auxiliar: Funciones

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez & Ignacio Dagach Abugattas

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ funciones.
Si f es biyectiva, denotamos su inversa como $f^{-1} : B \to A$.

Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad

- f es inyectiva si: $[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2] \;\vee\; [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$
- f es sobreyectiva si: $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$
- f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

Composición e Inversa

- Composición: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- Si f es biyectiva, existe $f^{-1} : B \to A$, tal que: $f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y$

Imagen y Preimagen

- Imagen: $f(A') = \{f(x) \in B \mid x \in A'\}$
- Preimagen: $f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$

Propiedades de la Composición

- Asociatividad:
  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- Si f, g inyectivas
  entonces $g \circ f$ es inyectiva.
- Si f, g sobreyectivas
  entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
- Si $g \circ f$ es inyectiva,
  entonces f es inyectiva
- Si $g \circ f$ es sobreyectiva,
  entonces g es sobreyectiva
- Si f, g biyectivas entonces
  $g \circ f$ es biyectiva y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Imagen y Preimagen

- $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A)$
- $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$
  Se tiene la igualdad si f es inyectiva