Auxiliar 8: Funciones II

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez &
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Evaluación en cero y Funciones Identidad

a) Sea $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$, considere la función:

$$\varphi : F \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = f(0)$$

   i) Demuestre que φ es sobreyectiva.
   ii) Indique si es o no inyectiva, justificando su respuesta.

b) Sea E un conjunto no vacío. Se define la función identidad $\mathrm{id}_E : E \to E$ como $\mathrm{id}_E(x) = x$. Sea $f : E \to E$ una función tal que $f \circ f = f$. Demuestre que:

   i) Si f es inyectiva, entonces $f = \mathrm{id}_E$.
   ii) Si f es sobreyectiva, entonces $f = \mathrm{id}_E$.

P2. Composición de Funciones Biyectivas

Considere el conjunto:

$$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$$

Se define la función:

$$\phi : A \times A \to A, \quad \phi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

a) Verifique que $\forall (f, g) \in A \times A$, se cumple que $\phi(f, g) \in A$.

b) Pruebe que ϕ es sobreyectiva pero no inyectiva.

c) Demuestre que $\forall (f, g) \in A \times A$, se cumple: $\phi(\phi(f, g), \phi(g^{-1}, f^{-1})) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

P3. Conjuntos Estables

Sea $f : A \to B$ función. Un conjunto $D \subseteq A$ se dice *estable para* f si: $f^{-1}(f(D)) = D$

a) Demuestre que si A_1 y A_2 son estables para f, entonces $A_1 \cup A_2$ también lo es.

b) Demuestre que para todo $D \subseteq A$, el conjunto $E := f^{-1}(f(D))$ es estable para f.

Resumen Auxiliar: Funciones

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez & Ignacio Dagach Abugattas

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ funciones.
Si f es biyectiva, denotamos su inversa como $f^{-1} : B \to A$.

Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad

- f es inyectiva si: $[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2] \;\vee\; [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$
- f es sobreyectiva si: $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$
- f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

Composición e Inversa

- Composición: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- Si f es biyectiva, existe $f^{-1} : B \to A$, tal que: $f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y$

Imagen y Preimagen

- Imagen: $f(A') = \{f(x) \in B \mid x \in A'\}$
- Preimagen: $f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$

Propiedades de la Composición

- Asociatividad:
  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- Si f, g inyectivas
  entonces $g \circ f$ es inyectiva.
- Si f, g sobreyectivas
  entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
- Si $g \circ f$ es inyectiva,
  entonces f es inyectiva
- Si $g \circ f$ es sobreyectiva,
  entonces g es sobreyectiva
- Si f, g biyectivas entonces
  $g \circ f$ es biyectiva y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Imagen y Preimagen

- $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A)$
- $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$
  Se tiene la igualdad si f es inyectiva