



Auxiliar 5: Conjuntos

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez &
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Demostraciones

Sean $A, B, C, W, X, Y \subseteq E$ conjunto de referencia. Demuestre lo siguiente:

- a) $X \Delta Y = X \Delta W \Rightarrow Y = W$
- b) $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \Leftrightarrow A = \emptyset$
- c) $(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \Rightarrow X = Y$
- d) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq C$
- e) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
- f) $(A \cup C) \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
- g) $A \cup C = B \cup C \Leftrightarrow A \Delta B \subseteq C$
- h) $X \setminus (X \cap Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$
- i) $C \subseteq A \Delta B \Leftrightarrow (C \cap B \subseteq B \setminus A) \wedge (C \setminus B \subseteq A)$

P2. Demostraciones (interesantes)

- a) Sean $A, B, C \subseteq E$ conjunto de referencia, con $A \neq \emptyset$. Demuestre que si

$$\mathcal{J} = \{J \subseteq E \mid J \cap A \neq \emptyset\},$$

entonces:

- i) $E \in \mathcal{J}, A \in \mathcal{J}$
- ii) $A \setminus B \neq \emptyset \Rightarrow B^c \in \mathcal{J}$
- iii) $B \in \mathcal{J} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{J}$
- b) Se definen $P = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $I = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ y $D_n = \{2n, 2n + 1\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Demuestre que:

$$\left(\bigcup_{n \in P} D_n \right) \cap \left(\bigcup_{n \in I} D_n \right) = \emptyset$$

Resumen Auxiliar 5: Conjuntos

Profesora: Natacha Astromujoff

Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez & Ignacio Dagach Abugattas

Sea E un conjunto de referencia y $A, B, C, X, Y \subseteq E$.

Subconjunto

- Reflexividad: $A \subseteq A$
- Antisimetría: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$
- Transitividad: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
- Inclusiones útiles:

$$- \emptyset \subseteq A \subseteq E$$

$$- A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Intersección y Unión

- Idempotencia: $A \cap A = A, A \cup A = A$
- Neutros: $A \cap E = A, A \cup \emptyset = A$
- Absorbentes: $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup E = E$
- Conmutatividad: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
- Asociatividad:

$$- A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$- A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

- Distributividad:

$$- A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$- A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Resta de conjuntos

- $A \setminus B = A \cap B^c$
- $A^c = E \setminus A$

Propiedades útiles

- Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, entonces
 $A \cap B \subseteq X \cap Y, A \cup B \subseteq X \cup Y$
- Si $A \subseteq B$, entonces
 $A \cap C \subseteq B \cap C, A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$

Conjunto complemento

- Doble complemento: $(A^c)^c = A$
- De Morgan:
 - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- Consistencia: $A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = E$
- Inversión de la inclusión: $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
- LSSE:

$$- A \subseteq B$$

$$- B^c \subseteq A^c$$

$$- A \cap B^c = \emptyset$$

$$- A^c \cup B = E$$

Diferencia Simétrica

- Definición:
 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
 $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- Propiedades:
 - Conmutativa: $A \triangle B = B \triangle A$
 - Asociativa: $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$
 - Identidad: $A \triangle \emptyset = A$
 - Involutiva: $A \triangle A = \emptyset$