Auxiliar 3: Cuantificadores e Inducción

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez &
Ignacio Dagach Abugattas

P1. TBF(?) Cuantificadores:

a) Considere $\Omega = \{-1, 0, 1\}$. Determine el valor de verdad de

   i) $\forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega, x + y \leq 1$
   ii) $\forall x \in \Omega, \exists y \in \Omega, x^2 - y \leq 0$

b) Sea $U \neq \emptyset$ el conjunto universo. Considere $p(x)$ una función proposicional y q una proposición. Se definen las proposiciones r y s. Niegue ambas, y determine si $(r \implies s)$ y $(s \implies r)$ son, o no, tautologías.

   - $r : (\forall x \in U)(p(x) \Rightarrow q)$
   - $s : ((\forall x \in U), p(x)) \Rightarrow q$

c) Escriba la negación y determine el valor de verdad de la siguiente proposición:
$\forall x \in \mathbb{Q},\ \exists y \in \mathbb{Q}$, tal que $x \cdot y = 1 \vee x^2 + y^2 = 2$.

P2. Prinipio de Inducción, Fibonaccin't y mucho más:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 4^n - 1$ es divisible por 3.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 6.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \dfrac{7^{n+1} - 1}{6} = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$.

d) Considere la secuencia de números dada por: $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, para $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

   i) Encuentre una fórmula recursiva para H_n.
   ii) Demuestre por inducción que para todo $n \geq 1$: $H_1 + H_2 + \cdots + H_n = (n+1)H_n - n$.

e) Considere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ dada por: $u_0 = 2, \quad u_1 = 3, \quad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ si $n \geq 2$.
Demuestre usando inducción que: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 1$.

Resumen Auxiliar 3: Cuantificadores e Inducción

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez & Ignacio Dagach Abugattas

Cuantificadores

(I) Negación:
$\neg(\exists x \in E,\ P(x)) \iff (\forall x \in E,\ \neg P(x))$

(II) Negación:
$\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \iff (\exists x \in E,\ \neg P(x))$

(I) Distributividad de $\forall$ respecto de $\wedge$:
$\forall x \in E,\ P(x) \wedge Q(x) \iff (\forall x \in E,\ P(x)) \wedge (\forall x \in E,\ Q(x))$

(II) Distributividad de $\exists$ respecto de $\vee$:
$\exists x \in E,\ P(x) \vee Q(x) \iff (\exists x \in E,\ P(x)) \vee (\exists x \in E,\ Q(x))$

(III) Factorización del $\forall$ sobre $\vee$:
$(\forall x \in E,\ P(x)) \vee (\forall x \in E,\ Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in E,\ P(x) \vee Q(x))$

(IV) Expansión del $\exists$ sobre $\wedge$:
$\exists x \in E,\ P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow (\exists x \in E,\ P(x)) \wedge (\exists x \in E,\ Q(x))$

(I) Independencia de Cuantificadores:
$(\forall x \in E,\ p) \iff p$

(II) Independencia de Cuantificadores:
$(\exists x \in E,\ p) \iff p$

(III) Independencia de Cuantificadores:
$p \vee (\forall x \in E,\ Q(x)) \iff (\forall x \in E,\ p \vee Q(x))$

(IV) Independencia de Cuantificadores:
$p \wedge (\exists x \in E,\ Q(x)) \iff (\exists x \in E,\ p \wedge Q(x))$

(I) Intercambio de Cuantificadores:
$(\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x,y)) \iff (\forall y \in E,\ \forall x \in E,\ P(x,y))$

(II) Intercambio de Cuantificadores:
$(\exists x \in E,\ \exists y \in E,\ P(x,y)) \iff (\exists y \in E,\ \exists x \in E,\ P(x,y))$

(III) Intercambio de Cuantificadores:
$(\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ P(x,y))$

Principio de Inducción "Débil"

$$(\forall n \geq n_0,\ P(n)) \iff [P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0 + 1,\ P(n) \Rightarrow P(n+1))]$$

Principio de Inducción "Fuerte"

$$(\forall n \geq n_0,\ P(n)) \iff$$

$$[P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0 + 1,\ P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1))]$$