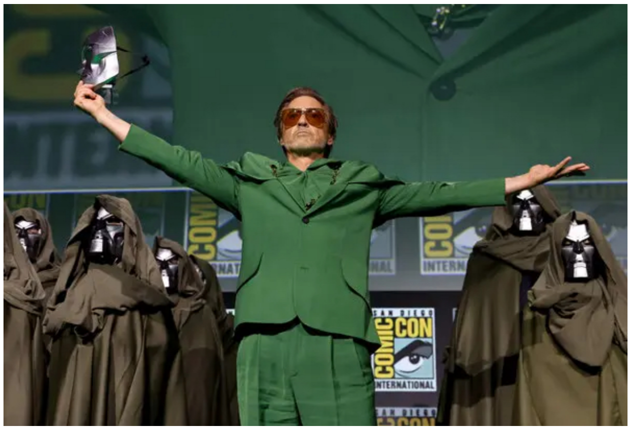
Recopilación Ejercicios

:)



Polinomios

- **P1.** Dado el polinomio $P(x) = x^5 - 2x^2 + 1$, divídalo por el polinomio $D(x)$, para obtener $P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$. Haga explícito Q y R:
    1. $D(x) = x^5$
    2. $D(x) = x^2 - 3x + 1$
    3. $D(x) = x - 1$
- **P2.** Sea $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ un polinomio con raíces $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Muestre que:

$$\alpha\beta\gamma = -c, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b, \quad \alpha + \beta + \gamma = -a.$$

- **P3.** Considere el polinomio con coeficientes reales no nulos:

$$P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

    1. Demuestre que si P posee una raíz imaginaria pura entonces $a_1^2 + a_0a_2^2 = a_1a_2a_3$.
    2. Encuentre $a_0, a_1, \ldots, a_3$ de manera que 2 sea raíz cuádruple de P.
- **P4.** Factorice el polinomio $P(x) = x^4 + 1$ en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.
- **P5.** Determine el polinomio mónico $P(x)$ de grado 3 tal que:
    - $P(2) = P(0) = 0$
    - El resto de dividir P por $x - 1$ es igual al resto de dividir P por $x - 3$.

- **P6.** Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$\Phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad p(x) \mapsto \Phi(p(x)) = p(a).$$

Pruebe que:

$$\Phi^{-1}(\{0\}) = \big\{(x-a)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{R}[x]\big\}.$$

Números Complejos

- **P1.**

  (a) Para $n \in \mathbb{N}$, encuentre la parte real e imaginaria de

  $$\big(-1 + i\sqrt{3}\big)^n + \big(-1 - i\sqrt{3}\big)^n.$$

  (b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ e $\mathrm{Im}(z) > 0$. Demuestre que

  $$\mathrm{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) > 0.$$

- **P2.** Mostrar que si $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ son sumas de cuadrados de dos naturales, entonces su producto también lo será. Esto es, si $s_j = a_j^2 + b_j^2$, para $j \in \{1, 2\}$, con $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$, demuestre que existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $s_1 \cdot s_2 = m^2 + n^2$. *Indicación:* Trabaje con los complejos $z_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2$.

- **P3.**

  (a) Demuestre que para todo $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq -1$ y $|z| = 1$, se tiene que:

  $$\frac{1+z}{1+\bar{z}} = z.$$

  (b) Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| = 1$ y $z^n \neq -1$. Demuestre que:

  $$\frac{z^n}{1 + z^{2n}} \in \mathbb{R}.$$

- **P4.** Sea $z \in \mathbb{C}$ un complejo cualquiera y sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0.$$

  (a) Demuestre que

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} \cdot (z_k - z) = n \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

  (b) Concluya que

  $$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|.$$

- **P5.** Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios (es decir, $|z_1| = |z_2| = 1$) y $u, v \in \mathbb{C}$, tales que:

$$z_1 + z_2 = -u, \quad z_1 \cdot z_2 = v.$$

  (a) Muestre que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.
  (b) Muestre que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{\overline{u}}{v}$.
  (c) Muestre que $u = \overline{u} \cdot v$.
  (d) Si las formas polares de u y v son $|u|e^{i\varphi}$ y $|v|e^{i\theta}$ respectivamente, muestre que $\theta = 2\varphi + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

- **P6.** Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ y $\mathrm{Im}(z) > 0$. Demuestre que:

$$\mathrm{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) > 0.$$

Cuerpos, Anillos y Grupos

- **P1.** Sea $(G, *)$ un grupo que verifica la siguiente propiedad:

$$\forall a, b \in G, \quad (a * b)^2 = a^2 * b^2.$$

  Demuestre que $(G, *)$ es un grupo abeliano.

- **P2.** Sean

$$G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0,\ f(x) = ax + b\},$$
$$\bar{G} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists b \in \mathbb{R},\ f(x) = x + b\}.$$

  Pruebe que $(G, \circ)$ es un grupo y que $(\bar{G}, \circ)$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

- **P3.** Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H = \{h \mid h : G \to G,\ h \text{ es endomorfismo}\}$. En H se define la ley $\triangle$ por:

$$(h_1 \triangle h_2)(x) = h_1(x) * h_2(x), \quad \forall h_1, h_2 \in H,\ \forall x \in G.$$

  Verifique que $\triangle$ es una ley de composición interna y que $(H, \triangle)$ es un grupo abeliano.

- **P4.** En $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ se define la siguiente ley de composición interna:

$$((a, b) * (c, d)) = (a \cdot c, b + a \cdot d).$$

  Demuestre que $((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, *)$ es un grupo, y que es isomorfo a $(G, \circ)$ de la **P2**. ¿Es $((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, *)$ un grupo abeliano?

- **P5.** En todo lo que sigue considere los conjuntos indicados con la suma usual de $\mathbb{Z}_n$.

  (a) ¿Son isomorfos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_4$?

- **P6.** Sea $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, dada por $f(m) = 6m$.

  (a) Demuestre que f es homomorfismo.
  (b) Para $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ es subgrupo de $\mathbb{Z}$.
  (c) Demuestre que $f(5\mathbb{Z})$ es subgrupo de lo que corresponda.

(d) Demuestre que $f^{-1}(12\mathbb{Z})$ es subgrupo de lo que corresponda.

- **P7.** Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e. Para $g \in G$, se define:

$$\langle g \rangle = \{kg \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

donde kg es el "producto" iterado:

$$kg = \begin{cases} e, & k = 0, \\ (k-1) * g, & k \geq 1, \\ (|k|(-g)), & k < 1. \end{cases}$$

(a) Sea G un grupo cualquiera y $g \in G$. Demuestre que $(\langle g \rangle, *)$ es un subgrupo de G.

Conjunto cuociente y conjuntos finitos

- **P1.** Sobre $(\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ se define la relación $\mathcal{R}$:

$$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \iff n + m' = n' + m.$$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $(\mathbb{N} \cup \{0\})^2$.

(b) Sea $\Phi : (\mathbb{N} \cup \{0\})^2/\mathcal{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $\Phi([(m, n)]_{\mathcal{R}}) = n - m$. Demuestre que Φ es una biyección.

- **P2.** Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \to B$ una función. Se define la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ (en A) mediante:

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

(a) Pruebe que g está bien definida y que es inyectiva.

(b) Pruebe que h es epiyectiva.

(c) Demuestre que $f = g \circ h$.

- **P3.** Sea $n \in \mathbb{N}$, calcule $|\{f : [1, n] \to [1, n] \mid f \text{ es biyectiva}\}|$.

- **P4.** Sea $\mathcal{F} = \{f \mid f : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, 2\} \text{ es función}\}$.

(a) Sea $j^* \in \{1, 2\}$ fijo. Se define además el conjunto $F_{j^*} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(j^*) = j^*\}$. Pruebe que $|F_1| = |F_2| = 512$ y que $|F_1 \cap F_2| = 256$.

(b) Pruebe que $|\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1 \vee f(2) = 2\}| = 768$.

- **P5.** Sea $A = [0..n]$, considere la secuencia $(x_0, x_1, \ldots)$ de elementos en A. Pruebe que existen $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $x_i = x_j$.

Sumatorias, Coeficientes Binomiales

- **P1.** Sean $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Encuentre una expresión en términos solo de n y m para:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{l-1}{7k+3} + \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{m} \right).$$

- **P2.** Demuestre, sin usar inducción, que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=3}^{n+3} (-1)^{k-3}(k-2)\binom{n+3}{k} = n+1.$$

- **P3.**

  (a) Demuestre que $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq k \leq n$:

  $$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

  (b) [Propuesto] Use lo anterior para probar, sin uso de inducción, que:

  $$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}.$$

New mask. Same task.