Auxiliar 23

Preparación Examen

Profesor: José Soto San Martín
Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas

P1.-

(a) Se define el polinomio:

$$P(x) = 6x^5 - 25x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 18x$$

Sabiendo que $P(x)$ admite 3 raíces enteras no negativas, factorice $P(x)$.

(b) Determine $P(x)$, un polinomio mónico de grado 3 que satisfaga las siguientes condiciones:

- $P(0) = P(2) = 0$.
- El resto de dividir $P(x)$ por $x - 1$ es igual al resto de dividir $P(x)$ por $x - 3$.

P2.-

(a) Sea A un conjunto, y $z \in A$. Se definen

$$\mathcal{B} = \{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva}\}, \qquad \mathcal{B}_z = \{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva } \wedge f(z) = z\}$$

Muestre que $(\mathcal{B}_z, \circ)$ es subgrupo de $(\mathcal{B}, \circ)$.

(b) Sea $E = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Se sabe que $(E, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad (no necesita probarlo). Para este anillo:

i) Encuentre los neutro de E para $+$ y para $\cdot$.
ii) Muestre que $(E, +, \cdot)$ no tiene divisores del cero.
iii) Muestre que $(E, +, \cdot)$ no es cuerpo.

(c) Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Definimos las siguientes operaciones sobre $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \qquad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

Se sabe (no lo demuestre) que $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

i) Encuentre el neutro para $\oplus$ y el neutro para $\odot$.

ii) Demuestre que $\forall (a, b) \in (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}\}$:

$$(a, b) \text{ no es divisor del } 0 \iff (a, b) \text{ es invertible}$$

$\boxed{\textbf{P3.-}}$

Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $v \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera.

Considere el conjunto $R_v = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ es la raíz enésima de } v\}$ y $U = \{w \in \mathbb{C} \mid w \text{ es la raíz enésima de } 1\}$. Tomemos también z_0 un elemento fijo en R_v.

Definimos en R_v la ley $*$ por:

$$\forall z, z' \in R_v, \quad z * z' = \frac{z \cdot z'}{z_0}$$

(a) Demuestre que $*$ es ley de composición interna en R_v.

(b) Pruebe que $\varphi : (R_v, *) \to (U, \cdot)$, tal que $\varphi(z) = \frac{z}{z_0}$, es un isomorfismo.

(c) Pruebe que $(R_v, *)$ es un grupo abeliano.

$\boxed{\textbf{P4.-}}$

(a) Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{a^{2^k} + 1} = \frac{2^{n+1}}{1 - a^{2^{n+1}}} - \frac{1}{1 - a}, \qquad a \neq \pm 1$$

Im Iron man