Auxiliar 20

a) Sean $P(x) = x^4 + ix^3 + 3x^2 - 4$ y $D(x) = x - i$, polinomios en $\mathbb{C}[x]$. Encuentre $Q \in \mathbb{C}[x]$ y $r \in \mathbb{C}$ tales que

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + r.$$

$$\Rightarrow \frac{P(x) - r}{D(x)} = Q(x)$$

$$\frac{P(x)}{D(x)} - \frac{r}{D(x)} = Q(x)$$

$$x^4 + ix^3 + 3x^2 - 4 \mid (x - i)$$

$$-(\cancel{x^4} - x^3 i) \qquad x^3 + 2x^2 i + x + i$$

$$= 2\cancel{x^3 i} + 3x^2 - 4$$

$$-(\cancel{2x^3 i + 2x^2})$$

$$x^2 - 4$$

$$-(\cancel{x^2} - xi)$$

$$-4 + \cancel{xi}$$

$$-(\cancel{xi} + 1)$$

$$-5 \to r$$

Así, tenemos $P(x) = D(x)\,Q(x) - 5$

$\therefore Q(x) = x^3 + 2x^2 i + x + i$

(b) Sean los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 9x - 18$$

$$Q(x) = x^5 + x^4 + 12x^3 + 4x^2 + 27x - 45$$

i) Encuentre las raíces de $P(x)$.

ii) Sabiendo que ambos polinomios comparten exactamente dos raíces, factorice ambos polinomios en $\mathbb{C}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 9x - 18$$

Revisamos 1: $1 - 2 + 9 - 18$ ✗

2: $8 - 8 + 18 - 18$ ✓

$$\cancel{x^3} - \cancel{2x^2} + 9x - 18 \mid (x - 2)$$

$$-(\cancel{x^3} - \cancel{2x^2}) \qquad x^2 + 9$$

$$\cancel{9x} - \cancel{18}$$

$$-(\cancel{9x} - \cancel{18})$$

$$0$$

$x^2 + 9$ $\qquad ax^2 + bx + c$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-0\pm\sqrt{0-36}}{2a}=\frac{\pm 6i}{2}=\pm 3i$$

Facto en $\mathbb{R}$: $(x-2)(x^2+9)$

Raíces: $(x-2)(x+3i)(x-3i)$

$\mathbb{Q}$: $(x+3i)(x-3i)(x-2)$

II) Si comparten exactamente 2 raíces, deben ser los complejas!

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^5}+x^4+12x^3+4x^2+27x-45 & (x^2+9) \\ \hline -(\cancel{x^5}+9x^3) & x^3+x^2+3x-5 \\ \cancel{x^4}+3x^3+4x^2+27x-45 & \\ -(\cancel{x^4}+9x^2) & \\ \cancel{3x^3}-5x^2+\cancel{27x}-45 & \\ -(\cancel{3x^3}+\cancel{27x}) & \\ -\cancel{5x^2}-\cancel{45} & \\ -(-\cancel{5x^2}-\cancel{45}) & \\ 0 // & \end{array}$$

Tenemos x^3+x^2+3x-5

$1 \to 1+1+3-5$ ✓

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}+x^2+3x-5 & (x-1) \\ \hline -(\cancel{x^3}-x^2) & x^2+2x+5 \\ \cancel{2x^2}+3x-5 & \\ -(\cancel{2x^2}-2x) & \\ \cancel{5x}-\cancel{5} & \\ -(\cancel{5x}-\cancel{5}) & \\ 0 // & \end{array}$$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}$$

$-1-2i \mid -1+2i$

Factorización $Q(x)$ → en $\mathbb{R}$: $(x^2+2x+5)(x^2+9)(x-1)$

→ en $\mathbb{C}$: $(x-(-1-2i))(x-(-1+2i))(x+3i)(x-3i)(x-1)$

(a) Sea el polinomio $P\in\mathbb{R}[x]$ de grado $2n+2$, y sean $i, i\sqrt{2}, i\sqrt{3}, \dots, i\sqrt{n}\}$ raíces de P. Encuentre todas las raíces de $P(x)$, sabiendo que: $P(0)=n!$, $\quad P(1)=(n+1)!$, $\quad P(2)=\frac{1}{8}(n+4)!$

$P\in\mathbb{R}[x]$, entonces tiene solo coeficientes reales

Se tienen $\{i, i\sqrt{2}, i\sqrt{3}, \dots, i\sqrt{n}\}$ n de sus raíces, luego sus conjugados también deben ser raíces, así: $\{-i, -i\sqrt{2}, -i\sqrt{3}, \dots, -i\sqrt{n}\}$ son n raíces más.

O sea nos faltan 2 raíces, ya que es un polinomio de grado $2n+2$

Luego, sabemos que

$$(x-i)(x-(-i))(x-i\sqrt{2})(x-(-i\sqrt{2}))\ldots(x-i\sqrt{n})(x-(-i\sqrt{n}))\mid P(x)$$

$$=(x^2-i^2)(x^2-(i\sqrt{2})^2)\ldots(x-(i\sqrt{n})^2)$$

$$=(x^2+1)(x^2+2)\ldots(x^2+n)$$

Así, tenemos que:

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)\ldots(x^2+n)Q(x)$$

sabemos que $Q(x)$ debe tener 2 raíces, por lo que $Q(x)$ debe ser de la forma ax^2+bx+c (o sea de grado 2)

Luego, veamos el resto:

$$P(0)=n! \Leftrightarrow (0^2+1)(0^2+2)(0^2+3)\ldots(0^2+n)(a\cdot 0^2+b\cdot 0+c)=n!$$

$$\Leftrightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\,(c)=n!\,c\overset{!}{=}n!$$

$$c=1$$

Entonces $ax^2+bx+c=ax^2+bx+1$, sigamos

$$P(1)=(n+1)! \Leftrightarrow (1^2+1)(1^2+2)(1^2+3)\ldots(1^2+n)(a\cdot 1^2+b\cdot 1+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)(a+b+1)$$

$$\Leftrightarrow (n+1)!\,(a+b+1)\overset{!}{=}(n+1)!$$

$$a+b+1=1$$

$$a+b=0$$

$$a=-b$$

Sigamos,

$$P(2)=\frac{1}{8}(n+4)! \Leftrightarrow (2^2+1)(2^2+2)(2^2+3)\ldots(2^2+n)(a2^2+b2+1)$$

$$5\cdot 6\cdot 7\ldots(4+n)(4a+2b+1)$$

$$(n+4)!\,(4a+2b+1)\overset{!}{=}\frac{1}{8}(n+4)!$$

$4\cdot3\cdot2\cdot1$ $\qquad\qquad 8$

$$\frac{4a+2b+1}{3} = 1 \qquad a=-b$$

$$4a-2a+1=3$$

$$2a=2$$

$$a=1 \wedge b=-1$$

Finalmente, $ax^2+bx+1 = x^2-x+1$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Así, las raíces son $\{i,-i,i\sqrt{2},-i\sqrt{2},\dots,i\sqrt{n},-i\sqrt{n},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

(b) Sean $u,v,w\in\mathbb{C}$. Considere el sistema de ecuaciones (s) dado por:

$$(s) = \begin{cases} u+v+w=4 & (1)\\ uvw=4 & (2)\\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}=\dfrac{3}{2} & (3)\end{cases}$$

Sea $P\in\mathbb{R}[x]$ el polinomio dado por $P(x)=(x-u)(x-v)(x-w)$, donde u,v,w son las soluciones del sistema (s).

i) Pruebe que $P(x)=x^3-4x^2+6x-4$.

ii) Factorice P en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

I)

$$P(x)=(x-u)(x-v)(x-w)$$

$$=(x^2-xv-xu+uv)(x-w)$$

$$=(x^3-x^2v-x^2u+xuv-x^2w+xvw+xuw-uvw)$$

$$=x^3-x^2\underbrace{(v+u+w)}_{(1)}+x(uv+vw+uw)-\underbrace{uvw}_{(2)}$$

$$=x^3-x^2(4)+x\underbrace{(uv+vw+uw)}_{\text{revisemos con (3)}}-4$$

$$\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)(uvw)=\frac{3}{2}\cdot4=6$$

$= x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ ✓ good

II) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$

$1 \to 1 - 4 + 6 - 4$ ✗

$-1 \to -1 - 4 - 6 - 4$ ✗

$2 \to 8 - 16 + 12 - 4$ ✓

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 4x^2 + 6x - 4 & (x-2) \\ \hline -(x^3 - 2x^2) & x^2 - 2x + 2 \\ \quad -2x^2 + 6x - 4 & \\ \quad -(-2x^2 + 4x) & \\ \qquad 2x - 4 & \\ \qquad -(2x - 4) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$x^2 - 2x + 2 \quad \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm 1i$ ⟨ $1+i$, $1-i$

(a) Se define el polinomio $P(z) = z^6 - 2iz^3 - 1$ Encuentre las raíces de P(z), indicando la multiplicidad de cada una de ellas

$P(z) = z^6 - 2iz^3 - 1 = (z^3)^2 - 2iz^3 - 1 = y^2 - 2iy + i^2 = (y - i)^2 = (z^3 - i)^2 = Q(z)^2$

CV: $y = z^3$

luego,

$P(z) = 0 \Rightarrow Q(z)^2 = 0 \Rightarrow Q(z) = 0 \Rightarrow z^3 - i = 0 \Rightarrow z^3 = i$

Así,

$(|z| e^{i\arg(z)})^3 = \cancel{|i|}^{1} e^{i \cancel{\arg(i)}^{\pi/2}}$

$|z|^3 e^{i3\arg(z)} = 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \quad k = 0, 1, 2$

$\Rightarrow |z|^3 = 1$

$\arg(z) = \dfrac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2$

Soluciones $z_0 = e^{i\pi/6}$, $z_1 = e^{i5\pi/6}$, $z_2 = e^{i3\pi/2}$

Raíces de $Q(z)$: z_0, z_1, z_2

$\Rightarrow Q(z) = (z - z_0)\cdot(z - z_1)(z - z_2) \Rightarrow P(z) = (z-z_0)^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2$

z_0, z_1, z_2 son las raíces con multiplicidad 2

(b) Demuestre que si $2 + i \in \mathbb{C}$ es una raíz del polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$, dado por

$$P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

con $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 - 4x + 5$ divide a P.

Como $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, entonces P es un polinomio a coef reales. Luego, como $2+i \in \mathbb{C}$ es una raíz, su conjugado también lo es, entonces $(x-c_1)(x-c_2) \mid P(x)$

Notemos que, $(x-c_1)(x-c_2) = (x-(2+i))(x-(2-i))$

$= (x-2-i)(x-2+i)$

$= x^2 - 2x + \cancel{xi} - 2x + 4 - \cancel{2i} - \cancel{xi} + \cancel{2i} + 1$

$= x^2 - 4x + 5$

Así, $x^2 - 4x + 5$ divide a $P(x)$

suponemos un polinomio de grado 3 $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

$p(-2)=0$: $-8a+4b-2c+d=0$

$p(0)=4$ $d=4$

$p(1)=3$ $a+b+c+d=3$

$p(2)=16$ $8a+4b+2c+d=16$

supongamos existen $P(x)$ y $Q(x)$ $\neq$ ambos grado n, que pasan por los mismos $n+1$ puntos

Definimos $R(x) = P(x)-Q(x)$

$R(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = y_i - y_i = 0$

Es decir

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

grado n

$c \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(x)$ si $P(c) = 0$

Por TFA, $P(x)$ posee n raíces complejas