Auxiliar 20

Polinomios

Profesor: José Soto
Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas

P1.-

a) Sean $P(x) = x^4 + ix^3 + 3x^2 - 4$ y $D(x) = x - i$, polinomios en $\mathbb{C}[x]$. Encuentre $Q \in \mathbb{C}[x]$ y $r \in \mathbb{C}$ tales que

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + r.$$

(b) Sean los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 9x - 18$$

$$Q(x) = x^5 + x^4 + 12x^3 + 4x^2 + 27x - 45$$

i) Encuentre las raíces de $P(x)$.

ii) Sabiendo que ambos polinomios comparten exactamente dos raíces, factorice ambos polinomios en $\mathbb{C}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$.

P2.-

(a) Sea el polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado $2n+2$, y sean $i, i\sqrt{2}, i\sqrt{3}, \ldots, i\sqrt{n}\}$ raíces de P. Encuentre todas las raíces de $P(x)$, sabiendo que: $P(0) = n!$, $\quad P(1) = (n+1)!$, $\quad P(2) = \frac{1}{8}(n+4)!$

(b) Sean $u, v, w \in \mathbb{C}$. Considere el sistema de ecuaciones (s) dado por:

$$(s) = \begin{cases} u + v + w = 4 \\ uvw = 4 \\ \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{w} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio dado por $P(x) = (x-u)(x-v)(x-w)$, donde u, v, w son las soluciones del sistema (s).

i) Pruebe que $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

ii) Factorice P en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

P3.-

(a) Se define el polinomio $P(z) = z^6 - 2iz^3 - 1$ Encuentre las raíces de P(z), indicando la multiplicidad de cada una de ellas

(b) Demuestre que si $2 + i \in \mathbb{C}$ es una raíz del polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$, dado por

$$P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

con $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 - 4x + 5$ divide a P.

Im sorry, earth is closed today

Proposición 1 (Igualdad de polinomios). Sean $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k \quad \text{y} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k$$

Entonces,

$$P = Q \Leftrightarrow (n = m \ \wedge \ \forall k \in \{0, \ldots, n\},\ p_k = q_k)$$

Definición 1 (Grado). $P(x) = p_0 + \cdots + p_n x^n$. Si $p_n \neq 0$, escribimos $\mathrm{gr}(P) = n$. Si $P = 0$, entonces $\mathrm{gr}(P) = -\infty$.
Observación 1. Si $P = Q \Rightarrow \mathrm{gr}(P) = \mathrm{gr}(Q)$.
Definición 2 (Polinomio mónico). P es mónico si su coeficiente líder es 1.
Proposición 2. En $\mathbb{K}[x]$:

- $\mathrm{gr}(P + Q) = \max\{\mathrm{gr}(P), \mathrm{gr}(Q)\}$
- $\mathrm{gr}(PQ) = \mathrm{gr}(P) + \mathrm{gr}(Q)$

Proposición 3. $\mathbb{K}[x]$ es un dominio de integridad.
Observación 2. $\mathbb{K}[x], +, \cdot$ no es cuerpo.
Teorema 1 (División). Sean $P, D \in \mathbb{K}[x]$ con $D \neq 0$, existen únicos Q, R tales que:

$$P = QD + R \quad \text{con } \mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D)$$

Observaciones:

- Q: cociente
- R: resto

Teorema 2 (Resto). Sea $P \in \mathbb{K}[x]$, $c \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$\text{Resto de dividir por } x - c \text{ es } P(c)$$

Definición 3 (Raíz). c es raíz de P si $P(c) = 0$.
Proposición 5. $c \in \mathbb{K}$ es raíz $\Leftrightarrow (x - c) \mid P(x)$
Teorema 3. Sean $P, Q \in \mathbb{K}[x]$:

- Si $c_1, \ldots, c_k$ son raíces $\Rightarrow (x - c_1) \cdots (x - c_k) \mid P$
- P de grado $n \Rightarrow$ máx. n raíces distintas
- Si coinciden en $n+1$ puntos $\Rightarrow$ son el mismo polinomio

Teorema 4 (TFA). Si $P \in \mathbb{C}[x]$ y $\mathrm{gr}(P) \geq 1$, entonces P tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.
Corolario 1. Existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ y naturales $l_1, \ldots, l_m$ tales que:

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{l_1} \cdots (x - \alpha_m)^{l_m}$$

Proposición 6. Si $P \in \mathbb{C}[x]$, todos los conjugados complejos también son raíces.
Corolario 2. Todo $P \in \mathbb{R}[x]$ se puede factorizar en polinomios lineales y cuadráticos reales.
Proposición 7. Si $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ es raíz de $P \in \mathbb{Z}[x]$ con $\gcd(r, s) = 1$, entonces:

$$r \mid a_0, \quad s \mid a_n$$

Corolario 3. Si $P \in \mathbb{Z}[x]$ es mónico, entonces toda raíz racional es entera y divide a a_0.