P2.- Sea $\mathcal{H}$ la relación en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definida por:

$$(a,b)\,\mathcal{H}\,(c,d) \iff a+b \equiv_2 c+3d$$

(a) Pruebe que $\mathcal{H}$ es relación de equivalencia.

(b) Muestre que $[(0,0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{H}} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ y que $[(0,0)]_{\mathcal{H}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{H}} = \varnothing$.

(c) Determine $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\mathcal{H}$.

Para toda la pregunta: $k \in \mathbb{Z}$

(k', k'', k''')

a) PDQ: $\mathcal{H}$ es relación de equivalencia

1) PDQ: $\mathcal{H}$ es refleja (sea $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ PDQ: $(a,b)\,\mathcal{H}\,(a,b) \Leftrightarrow V$)

$(a,b)\,\mathcal{H}\,(a,b) \Leftrightarrow a+b \equiv_2 a+3b \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ tq $(a+b)-(a+3b)=2k \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ tq $\underset{-b=k}{-2b=2k}$ V

$\therefore$ $\mathcal{H}$ es refleja

2) PDQ: $\mathcal{H}$ es transitiva

(sea $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ PDQ: $(a,b)\,\mathcal{H}\,(c,d) \wedge (c,d)\,\mathcal{H}\,(e,f) \Rightarrow (a,b)\,\mathcal{H}\,(e,f)$)

$(a,b)\,\mathcal{H}\,(c,d) \Leftrightarrow (a+b)\equiv_2(c+3d) \Leftrightarrow (a+b-c-3d)=2k$

Queremos que $(a,b)\,\mathcal{H}\,(e,f) \Leftrightarrow a+b-e-3f \overset{!}{=} 2k$

$(c,d)\,\mathcal{H}\,(e,f) \Leftrightarrow (c+d)\equiv_2(e+3f) \Leftrightarrow (c+d-e-3f)=2k'$

Tenemos $(a+b-c-3d)|2$ y $(c+d-e-3f)|2$

Luego, $(a+b-c-3d)+(c+d-e-3f)=2k''$

Así, $(a+b-\cancel{c}+\cancel{c}-3d+d-e-3f)$ porque par + par es par

$(a+b-2d-e-3f)=2k'' \rightarrow (a+b-e-3f)=2k''+2d \rightarrow (a+b-e-3f)=2k''' \Leftrightarrow a+b\equiv_2 e+3f$

$\Leftrightarrow (a,b)\,\mathcal{H}\,(e,f)$

$\therefore$ $\mathcal{H}$ es transitiva

También se puede argumentar por transit de $\equiv_2$

3) PDQ: $\mathcal{H}$ es simetrica

(sea $(a,b)\,(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ PDQ: $(a,b)\,\mathcal{H}\,(c,d) \Rightarrow (c,d)\,\mathcal{H}\,(a,b)$)

$(a,b)\,\mathcal{H}\,(c,d) \Leftrightarrow a+b\equiv_2 c+3d$

Pero, se sabe que $(c,d)\,\mathcal{H}\,(c,d) \Leftrightarrow c+d\equiv_2 c+3d$

Así, se tiene también que $c+3d \equiv_2 c+d$ (por simetría de $\equiv_2$)

Luego, $a+b \equiv_2 c+d$ (por transitividad de $\equiv_2$)

$\Leftrightarrow c+d \equiv_2 a+b$ (por simetría de $\equiv_2$)

A su vez, sabemos que $a+b \equiv_2 a+3b$

Luego, $c+d \equiv_2 a+3b$ (por transitividad de $\equiv_2$)

$\Leftrightarrow (c,d) \mathcal{H} (a,b)$

$\therefore \mathcal{H}$ es simétrica

b) Antes de resolver, veamos como funcionan:

$[(0,0)]_{\mathcal{H}} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid (0,0)\mathcal{H}(a,b)\} \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

¿Cuales son los elementos que se relacionan ($\mathcal{H}$) con (a,b)?

$(0,0)\mathcal{H}(a,b) \Leftrightarrow 0+0-a-3b = 2k \rightarrow -(a+3b) = 2k$

impar . par = par
impar . impar = impar

par + par = par
par + impar = impar ×
impar + impar = par
impar + par = impar ×

Luego, $a \wedge b$ deben tener igual paridad, ✓

$[(1,0)]_{\mathcal{H}} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid (1,0)\mathcal{H}(a,b)\} \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

¿Cuales son los elementos que se relacionan ($\mathcal{H}$) con (a,b)?

$(1,0)\mathcal{H}(a,b) \Leftrightarrow 1+0-a-3b = 2k \rightarrow 1-\overbrace{(a+3b)}^{\text{debe ser impar}} = 2k$

impar . par = par
impar . impar = impar

par + par = par
par + impar = impar
impar + impar = par
impar + par = impar

Luego, $a \wedge b$ deben tener $\neq$ paridad ✓

-o-

Ahora si,

Queremos ver que $[(0,0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{H}} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Procedamos por doble $\subseteq$

$[(0,0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{H}} \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Es claro, por def de clase de equivalencia, $[(a,b)]_{\mathcal{H}} = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid (a,b)\mathcal{H}(x,y)\} \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

luego, la unión de estas clases de equivalencia está contenida en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ qed

$[(0,0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{H}} \supseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Si tomamos un $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ arbitrario

Supongamos que $(x,y)\notin [(0,0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{H}}$

$\Rightarrow (x,y)\in\left([(0,0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{H}}\right)^c$

$\Leftrightarrow (x,y)\in [(0,0)]_{\mathcal{H}}^c \cap [(1,0)]_{\mathcal{H}}^c$

$\Rightarrow (x,y)\not{\mathcal{H}}(0,0) \wedge (x,y)\not{\mathcal{H}}(1,0)$

$\Leftrightarrow \underset{\uparrow\ x+y \text{ impar}}{x+y} \not\equiv_2 \underbrace{0+3\cdot 0}_{0} \wedge \underset{\uparrow\ x+y-1 \text{ impar}}{x+y} \not\equiv_2 \underbrace{1+3\cdot 0}_{1}$

$\rightarrow\!\leftarrow$ 2 n° consecutivos no pueden ser impar e impar

$\therefore (x,y)\in [(0,0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1,0)]$

$\Rightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subseteq [(0,0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1,0)]$ (¡por que (x,y) era arbitrario!)

$\therefore \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = [(0,0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1,0)]$

Ahora, veamos que $[(0,0)]_{\mathcal{H}} \cap [(1,0)] = \emptyset$

Asumamos que $\exists (x,y)\in [(0,0)]_{\mathcal{H}} \cap [(1,0)]$

luego, $(x,y)\in[(0,0)]_{\mathcal{H}} \wedge (x,y)\in[(1,0)]_{\mathcal{H}}$

$\Leftrightarrow (x,y)\mathcal{H}(0,0) \wedge (x,y)\mathcal{H}(1,0)$

$\Rightarrow x+y \equiv_2 0 \wedge x+y \equiv_2 1$

$x+y$ par $x+y$ impar $\left(\begin{array}{l} x+y-1=2k \\ x+y=2k+1 \end{array}\right)$

$\rightarrow\!|\!\leftarrow$ $x+y$ no puede ser par e impar a la vez

Así, no existe ningún (x,y) que pertenezca a la intersección

$\therefore [(0,0)]_{\mathcal{H}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{H}} = \emptyset$

c) Nos piden determinar el conjunto cuociente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\mathcal{H}$

"Todas las formas de relacionarse de los elementos para cubrir el "espacio" " → Particiones

↳ conjunto de las clases de equivalencia: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\mathcal{H} = \{[(x,y)]_{\mathcal{H}} : (x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$

luego, por la parte b tenemos que si $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \Rightarrow (x,y) \in [(0,0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{H}}$

O sea, (x,y) se relaciona con $(0,0)$ o con $(1,0)$

Así, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\mathcal{H} = \{[(0,0)]_{\mathcal{H}}, [(1,0)]_{\mathcal{H}}\}$ qed

$\neq$ de $\emptyset$ (0,0) está ahí ✓
cubre todo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ✓
intersección $= \emptyset$ ✓
} Partición de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

P4.- Prueba las siguientes proposiciones.

(a) **(Aux 16)** El cardinal de $\{2i+1 \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{n-1},\ n \in \{1,\ldots,m\}\}$ es 2^{m-1}.

(b) El cardinal de $\left\{\frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{n-1},\ n \in \{9,10\}\right\}$ es $2^8 + 2^9$.

(c) El cardinal de $\left\{\frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{n-1},\ n \in \{1,\ldots,m\}\right\}$ es $2^m - 1$.

a) $\{2i+1 \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{n-1},\ n \in \{1,\ldots,m\}\}$

Muchas dependencias! $i \rightarrow n \rightarrow m$

¿Qué pasa con n? lo máximo que puede ser es m, luego, $2^{n-1} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{2^{1-1}} \ldots\ 2^{m-1}$

Así, en realidad tenemos

$\{2i+1 \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{m-1}\}$

luego, queremos contar cuantos $2i+1$ hay, pero si nos fijamos, cada vez que i cambia, es otro $2i+1$, o sea, tenemos $\{2\cdot 0+1,\ 2\cdot 1+1,\ 2\cdot 2+1 \ldots\}$ (La asignación $i \to 2i+1$ es biy)

$\therefore$ contar los $2i+1$, es lo mismo que contar cuantos i hay!

Luego, el conjunto de los i es $\{0, \ldots, 2^{m-1}-1\}$

Porque i es $\mathbb{N}$ y $i < 2^{m-1}$

Ocupamos la formula para contar conjuntos "Último - Primero + 1"

$2^{m-1} - 1 - 0 + 1 = 2^{m-1}$

Finalmente, tenemos que en efecto, el cardinal es 2^{m-1}

$|\{2i+1 \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{1, \ldots, m\}\}| = |\{2i+1 \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{m-1}\}| = |\{0, \ldots, 2^{m-1}-1\}|$
$= 2^{m-1} - 1 - 0 + 1 = 2^{m-1}$

b) $\{\frac{2i+1}{n} \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{9, 10\}\}$

Tenemos nuevamente muchas dependencias... pero... ahora sabemos que n puede ser $9 \vee 10$, NADA MÁS! ¿entonces? Dividir para contar!

$B_9 = \{\frac{2i+1}{9} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^9\}$

$B_{10} = \{\frac{2i+1}{10} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{10}\}$

$B = B_9 \cup B_{10}$

sabemos entonces $|B| = |B_9 \cup B_{10}| = |B_9| + |B_{10}| - |B_9 \cap B_{10}|$

si observamos B_9 y B_{10} vemos que tiene la misma forma que a), solo que con m conocido, luego $|B_9| = 2^{9-1} = 2^8$ y $|B_{10}| = 2^{10-1} = 2^9$

Falta ver que $B_9 \cap B_{10} = \emptyset$

PDQ: $B_9 \cap B_{10} = \emptyset$

Por contradicción, sea $x \in B_9 \cap B_{10}$

$\Rightarrow x \in B_9 \wedge x \in B_{10}$

$\Rightarrow x = \frac{2i+1}{9} \wedge x = \frac{2j+1}{10}$ para algún i, j

pero el x es el mismo, luego $\frac{2i+1}{2^9} = \frac{2j+1}{2^{10}}$

$$\frac{2^{10}}{2^9} = \frac{2j+1}{2i+1}$$

$$\underbrace{2(2i+1)}_{\text{par}} = \underbrace{2j+1}_{\text{impar}} \quad \rightarrow\!\leftarrow$$

Así, $|B| = |B_9| + |B_{10}| = 2^8 + 2^9$

good

c) $\{ \frac{2i+1}{n} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{1, \dots, m\} \}$

Bajo misma lógica que en b), podemos separar:

$B_n = \{ \frac{2i+1}{n} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1} \}$

$B = \bigcup_{n=1}^{m} B_n$

Recordemos que si $A_1, \dots, A_n$ son disjuntos $|\bigcup_n A_n| = |\sum_n A_n|$

Veamos que B_n sean disjuntos,

$k, l \in \{1, \dots, m\}$ PDQ: $B_k \cap B_l = \emptyset$

Por contradicción $x \in B_k \cap B_l$

$\Rightarrow x \in B_k \wedge x \in B_l$

$\Rightarrow x = \frac{2i+1}{2^k} \wedge x = \frac{2j+1}{2^l}$

como el x es el mismo, $\frac{2i+1}{2^k} = \frac{2j+1}{2^l}$

$$\frac{2^l}{2^k}(2i+1) = 2j+1$$

$$\underbrace{2^{l-k}(2i+1)}_{\text{par}} = \underbrace{2j+1}_{\text{impar}} \qquad l-k \geq 0$$

($2^{l-k} \in \mathbb{N}$ porque $i \in \mathbb{N}$, luego, necesariamente $l-k$ debe ser ≥ 0, de otra forma, $2^{l-k} \notin \mathbb{N}$)

$\rightarrow$ ⚡ $\leftarrow$ Así, los conjuntos son disjuntos.

luego,

$$|B| = \left|\bigcup_{n=1}^{m} B_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} B_n\right| = \sum_{n=1}^{m} |B_n| = \sum_{n=1}^{m} 2^{n-1} = \sum_{n=0}^{m-1} 2^n = \frac{2^{m-1+1}-1}{2-1}$$

$$= 2^m - 1$$

Considere la familia de funciones $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_0 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, se define:

$$A_f = \{f_n(a) \mid a \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Pruebe que se A es numerable, entonces A_f es numerable

A_f es el conjunto de los funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $f_n(a) \in A$, $n \in \mathbb{N}$

Tenemos dependencia de a y de n, dividamos!

$$A_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(a) \mid a \in A\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(A)$$

1.

Tenemos que $|f_n(A)| \leq |A|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ por propiedad

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ f_n(A)$ es a lo más numerable, porque $|A| = |\mathbb{N}|$

Así, $|f_n(A)| \leq |A| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |f_n(A)| \leq |\mathbb{N}|$ 1 ✓

2. Falta ver que sea infinito

Tenemos que $f_0 = id_{\mathbb{R}}$, osea $f_0(a) = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$

$\forall a \in A,\ f_0(a) = a \in A_f$

$f_0(A) \subseteq f_n(A)$

Pero podemos observar que $A \subseteq f_0(A)$ porque $f_0(a) = a$ $\forall a \in A$. Así, $|A| \leq |f_0(A)| \leq |f_n(A)|$

y como $|\mathbb{N}| = |A| \leq |f_n(A)|$ 2✓

$\therefore$ Tenemos que $|f_n(A)| = |\mathbb{N}|$

Finalmente, volvemos a $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(A)$

Por propiedad, sabemos que la union de numerables es numerable

Así, A es numerable

qed