Auxiliar 18

Preparación C5

Profesor: José Soto San Martín
Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas

P1.-
Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f \text{ es función}\}$, y sea $\mathcal{R}$ una relación en $\mathbb{Z}$.

Se define en $\mathcal{F}$ la relación Ω, dada por:

$$\forall f, g \in \mathcal{F},\ f\Omega g \iff \forall x \in \mathbb{Z},\ f(x)\,\mathcal{R}\,g(x)$$

(a) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es relación de orden en $\mathbb{Z}$, entonces Ω es también una relación de orden en $\mathcal{F}$.

(b) (i) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$, entonces Ω es también una relación de equivalencia en $\mathcal{F}$.

(ii) Sea $\mathcal{R}$ la relación $\equiv_3$, es decir congruencia módulo tres, y sea $f_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_0 \in \mathcal{F}$ definida por $f_0(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{Z}$. Demuestre que:

$$[f_0]_\Omega = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid \forall x \in \mathbb{Z},\ f(x) \text{ es múltiplo de } 3\}$$

P2.- Sea $\mathcal{H}$ la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(a, b)\,\mathcal{H}\,(c, d) \iff a + b \equiv_2 c + 3d$$

(a) Pruebe que $\mathcal{H}$ es relación de equivalencia.

(b) Muestre que $[(0, 0)]_\mathcal{H} \cup [(1, 0)]_\mathcal{H} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $[(0, 0)]_\mathcal{H} \cap [(1, 0)]_\mathcal{H} = \varnothing$.

(c) Determine $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathcal{H}$.

P3.-

(a) Demuestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : \frac{x}{7} + \frac{y}{3} \in \mathbb{N}\}$$

(b) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos numerables. Pruebe que el siguiente conjunto es numerable:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

(c) Muestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$C = \{..., -16, -9, -4, -1, 1, 4, 9, 16, ...\}$$

$\boxed{\textbf{P4.-}}$ Pruebe las siguientes proposiciones.

(a) **(Aux 16)** El cardinal de $\left\{2i+1 \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{n-1},\ n \in \{1, \ldots, m\}\right\}$ es 2^{m-1}.

(b) El cardinal de $\left\{\frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{n-1},\ n \in \{9, 10\}\right\}$ es $2^8 + 2^9$.

(c) El cardinal de $\left\{\frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{n-1},\ n \in \{1, \ldots, m\}\right\}$ es $2^m - 1$.

(d) Considere la familia de funciones $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_0 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, se define:

$$A_f = \{f_n(a) \mid a \in A,\, n \in \mathbb{N}\}$$

Pruebe que se A es numerable, entonces A_f es numerable

$\boxed{\textbf{P5.-}}$

Se define el siguiente conjunto:

$$\mathcal{F} = \{f : \{1, ..., 10\} \to \{1, 2\} \mid f \text{ es funcion}\}$$

Para $j \in \{1, 2\}$, se define el conjunto:

$$F_j = \{f \in \mathcal{F} : f(j) = j\}$$

Calcule el cardinal de $F_1, F_2, F_1 \cap F_2$. Además, calcule el cardinal del siguiente conjunto:

$$\{f \in \mathcal{F} : f(1) = 1 \lor f(2) = 2\}$$