P1 Tecnicas de demostración para conjuntos numerables !

P1.- Muestre que los siguientes conjuntos son numerables:

(a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N},\ x = \frac{k}{3^n}\right\}$

(b) $B = \left\{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$

(c) $$A = \{x \in [0, \infty) \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x^n \in \mathbb{N}\}.$$

(d) Muestre que el conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable

Perdón! Las hice en desorden

c) $x \in [0,\infty) \mid \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ x^n \in \mathbb{N}$

El conjunto funciona como: $x^1 \in \mathbb{N}, x^2 \in \mathbb{N}, x^3 \in \mathbb{N}, \dots, x^k \in \mathbb{N}, x^{k+1} \in \mathbb{N}, \dots$

Luego, se puede separar el conjunto A (Técnica 3: Dividir para contar!)

$$A \begin{cases} A_1 = \{x \in [0,\infty) \mid \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ x^1 \in \mathbb{N}\} \\ A_2 = \{x \in [0,\infty) \mid \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ x^2 \in \mathbb{N}\} \\ \vdots \\ A_k = \{x \in [0,\infty) \mid \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ x^k \in \mathbb{N}\} \\ A_{k+1} = \{x \in [0,\infty) \mid \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ x^{k+1} \in \mathbb{N}\} \\ \vdots \end{cases}$$

Luego, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} A_n$

Ahora, basta demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ A_n es num!

Notemos que si $x \in A_n$, entonces $x^n \in \mathbb{N}$. Podemos definir una función que tome un x y lo asocie a un $x^n \in \mathbb{N}$. Definimos α_n por:

$$\alpha_n : A_n \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto \alpha_n(x) = x^n$$

sabemos que $x^n \in \mathbb{N}$!

Biy? Sean $x, y \in A_n$ tq $\alpha_n(x) = \alpha_n(y)$. Se tiene que:

$$\alpha_n(x) = \alpha_n(y) \Leftrightarrow x^n = y^n \qquad x, y \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x = y$$

$\therefore$ Es inyectiva

sea $z \in \mathbb{N}$, basta tomar $\sqrt[n]{z} \in A_n$, que satisface $\alpha_n(\sqrt[n]{z}) = (\sqrt[n]{z})^n = z$

$\therefore$ Es epiyectiva

$\therefore$ Es biy!

Luego, como existe una biyección entre A_n y $\mathbb{N}$, entonces $|A_n| = |\mathbb{N}|$, es decir, A_n es numerable, como $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ es arbitrario, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, A_n es numerable

Así, se tiene que A es numerable, porque la unión de conjuntos numerables es a su vez numerable (por prop) great

a)

Técnica 1: "Acotar"

a) PDQ: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \mathbb{N},\ x = \frac{k}{3^i}\}$ es numerable

$|\mathbb{N}|$ es el cardinal infinito más pequeño, por lo que una forma de demostrar que un conjunto es numerable es probar que (1) Es infinito (Su cardinal es a lo menos $|\mathbb{N}|$)

(2) Su cardinal es a lo más $|\mathbb{N}|$

(1) Es claro que A es infinito, pues si fijamos $k=1$, y moviendo i, tenemos que todos los números de la forma $\frac{1}{3^i}$, están en A. O sea, $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \dots\} \subseteq A$ y claramente hay infinitos de estos números

$\therefore$ A es infinito

$\mathbb{N}$ es el menor cardinal finito

$\therefore$ $|\mathbb{N}| \leq |A|$

(2) Notemos que si $x \in A$, entonces x se puede escribir $x = \frac{k}{3^i}$, para algunos $i, k \in \mathbb{N}$

O sea... x es racional!

Luego, $A \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow |A| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

Así,

como $|A| \leq |\mathbb{N}| \wedge |\mathbb{N}| \leq |A|$

$\therefore |A| = |\mathbb{N}|$, es decir, A es numerable

Técnica 2: Biyecciones

b) PDQ: $B = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ es numerable

Podemos encontrar una función biyectiva entre algún conjunto numerable y el conjunto en cuestión

Tenemos elementos de la forma $a + b\sqrt{7}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$

↳ Tenemos "parametros" $a, b \in \mathbb{Q}$, que generan elementos $a + b\sqrt{7}$

O sea, $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow B$

$(a,b) \longmapsto f(a,b) = a + b\sqrt{7}$

Veamos que es biy

(1) Iny: Sean $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tq $f(a,b) = f(c,d)$, veamos que $(a,b) = (c,d)$

Como $f(a,b) = f(c,d)$

$\Rightarrow a + b\sqrt{7} = c + d\sqrt{7}$

$\Rightarrow a - c = (d-b)\sqrt{7}$ suponagamos que $(d-b) \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{a-c}{d-b} = \sqrt{7}$

Notemos que $\dfrac{a-c}{d-b}$ es racional porque a, b, c, d lo son $\Rightarrow \sqrt{7}$ es racional ✳ $\sqrt{7}$ es irracional!

Así, $d - b = 0 \Rightarrow d = b$

$\Rightarrow a - c = \overbrace{(d-b)}^{0}\sqrt{7}$

$a-c=0 \Rightarrow a=c$

Luego, $(a,b)=(c,d)$

$\therefore$ f es inyectiva

(2) Biy

Sea $x\in B$. PDQ: $\exists (a,b)\in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ tq $x=f(a,b)$

Como $x\in B \Rightarrow x=a+b\sqrt{7}$ para ciertos $a,b\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow x=f(a,b)$ $(a,b)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

$\therefore$ f es sobreyectiva

Así, tenemos que f es biyectiva

$\Rightarrow |B|=|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|$

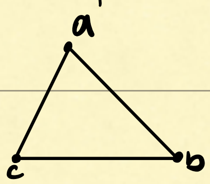
Pero $\mathbb{Q}$ es numerable, con lo que $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ también lo es, es decir $|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$

$\therefore |B|=|\mathbb{N}|$, luego, B es numerable qed

d)

(b) Muestre que conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son elementos de $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ es numerable.

Nos piden el conjunto de todos los Δ's cuyos vértices esten en



$$\Delta=\{(a,b,c)\in(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})^3 \mid a\neq b, b\neq c, a\neq c\}\subseteq(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})^3=(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\times(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\times(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$$

$$|\Delta|\leq|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\dots\times\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$$

$$\therefore |\Delta|\leq|\mathbb{N}|$$

Veamos que Δ es infinito:

Consideremos la familia de puntos $F=\{(a_n,b_n,c_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$

con $a_n=(n,0)$, $b_n=(1/2,1/2)$, $c_n(1/2,-1/2)$

Esta familia infinita de triángulos φ $F\subseteq\Delta$ porque tenemos a_n moviéndose libremente en $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

$\Rightarrow \Delta$ es infinito $\Rightarrow |\mathbb{N}|\leq|\Delta|$

Como $|\Delta|\leq|\mathbb{N}|$ concluimos que $|\Delta|=|\mathbb{N}|$ qed

P2.- Demuestre que el conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ con cardinal menor o igual a 2 es numerable.
Es decir, pruebe que el conjunto

$$\mathcal{H}=\{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}):|A|\leq 2\}$$

es numerable.

$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\cup\mathcal{H}_1\cup\mathcal{H}_2$

con $\mathcal{H}_0=\{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}):|A|=0\}$ *puedo "verlo lógicamente" también!

$\mathcal{H}_1=\{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}):|A|=1\}$

$\mathcal{H}_2=\{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}):|A|=2\}$

↳ único conjunto $|A|=0$ es $\{\emptyset\}$

↳ si tiene $|A|=1$, tiene 1 elemento $\{n\}$, pero como $\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\{\{n\}, n\in\mathbb{N}\}$

↳ " " " $=2$ " 2 " s $\{n,m\}$ $(n\neq m)$, " " " $\{\{\{n,m\}\ n,m\in\mathbb{N}, n\neq m\}$

Veamos como son los conjuntos

$\boxed{\mathcal{H}_0}$ $A\in\mathcal{H}_0 \Leftrightarrow A\subseteq\mathbb{N}\wedge|A|=0$

$\Leftrightarrow A\subseteq\mathbb{N}\wedge A=\emptyset \Leftrightarrow A=\emptyset\in\{\emptyset\}$

$\Leftrightarrow \mathcal{H}_0=\{\emptyset\}$ y $|\mathcal{H}_0|=1$

Luego, $\mathcal{H}_0$ es finito!

$\boxed{\mathcal{H}_1}$ Sea $A\in\mathcal{H}_1$ arbitrario

$\Leftrightarrow A\subseteq\mathbb{N}\wedge|A|=1$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}, A=\{n\}$

$\Leftrightarrow A\in\{\{n\}:n\in\mathbb{N}\}$

$\therefore \mathcal{H}_1=\{\underline{\{n\}}:n\in\mathbb{N}\}$

an

Es claro que C_1 es numerable, basta definir una biyección simple

$$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{H}_1$$
$$n \longmapsto \{n\}$$

También como lo vimos en clases:

$\mathcal{H}_1$ es claramente infinito $\therefore |\mathcal{H}_1| \geq |\mathbb{N}|$

$\mathcal{H}_1 \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow |\mathcal{H}_1| \leq |\mathbb{N}|$ $\Big\} |\mathcal{H}_1| = |\mathbb{N}|$

lo cual es biyectiva!

Iny: $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ arbitrarios tq

$g(n_1) = g(n_2)$, entonces $\{n_1\} = \{n_2\}$

ie: $n_1 = n_2$

Epiy: Sea $A \in C_1$ arbitrario

$\overset{\text{def } C_1}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}, A = \{n\} = g(n)$ ✓

$\therefore |\mathcal{H}_1| = |\mathbb{N}|$, C_1 es numerable

$\mathcal{H}_2$

Sea $A \in \mathcal{H}_2$ arbitrario

$\Leftrightarrow A \subseteq \mathbb{N} \wedge |A| = 2$

$\Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}, n < m, A = \{n, m\}$

$\Leftrightarrow A \in \{\{n, m\}, n, m \in \mathbb{N}, n < m\}$

$\therefore \mathcal{H}_2 = \{\{n, m\} : n, m \in \mathbb{N}, n < m\}$

Sacamos subconjunto de $\mathcal{H}_2$

$\mathcal{H}_2' = \{\{0, m\} : 0, m \in \mathbb{N}, 0 < m\}$

Tenemos que este conjunto es claramente infinito y tenemos que $\mathcal{H}_2' \subseteq \mathcal{H}_2$, pero $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{H}_2'|$

Así, $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{H}_2'| \leq |\mathcal{H}_2| \Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |\mathcal{H}_2|$

Luego, tenemos que $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\therefore |C_2| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

También se puede ver por biyecciones simples

Finalmente $C_0 \cup C_1 \cup C_2$ es unión finita de numerables con conj. finito es numerable $\therefore$ $\mathcal{C}$ es numerable

$f: C_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\{n_1, n_2\} \to f(\{n_1, n_2\}) = n_1, n_2$

Iny) $f(\{n_1, n_2\}) = f(\{n_3, n_4\})$

$(n_1, n_2) = (n_3, n_4)$

$\Rightarrow n_1 = n_3 \wedge n_2 = n_4$

OJO! También se pueden hacer "mezclas de demostraciones"! Puedo ver por ejemplo una f. iny por un lado y que este $\heartsuit \leq |\mathbb{N}|$ por el otro, o al revés, epiyectiva y $\heartsuit \geq |\mathbb{N}|$

P3.- Definimos en $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ según:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d).$$

(a) Verifique si $*$ es o no conmutativa y/o asociativa.

(b) Encuentre el neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$.

(c) Determine qué elementos son invertibles y calcule sus inversos.

(d) Determine los elementos idempotentes de la estructura.

(e) Resuelva la ecuación $(3, 1) * (x, y) * (2, -7) = (72, 43)$ en $\mathbb{R}^2$.

1) conmutatividad

PDQ: $(a,b) * (c,d) = (c,d) * (a,b)$

$(a,b) * (c,d) = (ac, bc+d)$

$(c,d) * (a,b) = (ca, da+b)$

$a=1, b=1, c=2, d=0$: $(2,2) \neq (2,1)$

$\therefore *$ no es conmutativa

II) Asociativa

PDQ: $\underbrace{((a,b)*(c,d))*(e,f)}_{1} = \underbrace{(a,b)*((c,d)*(e,f))}_{2}$

1) $(ac, bc+d)*(e,f) = (ace, (bc+d)e+f) = (ace, bce+de+f)$

2) $(a,b)*(ce, de+f) = (ace, (de+f)a+c) = (ace, bce+de+f)$

$\therefore$ Es asociativa

b) Neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$

$(a,b)*(e_1,e_2) = (e_1,e_2)*(a,b) = (a,b)$

$(a,b)*(e_1,e_2) = (ae_1, be_1+e_2) \overset{!}{=} (a,b)$

$\Rightarrow ae_1 = a \rightarrow e_1 = 1$

$be_1+e_2 = b \Rightarrow b+e_2 = b \rightarrow e_2 = 0$

Revisamos por el otro lado $(1,0)*(a,b) = (1\cdot a, 0\cdot a+b) = (a,b)$

$(1,0)$ es el neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$

c) Elementos invertibles

$(a,b)*(\varphi_1,\varphi_2) = (\varphi_1,\varphi_2)*(a,b) = (1,0)$

Queremos ver

$(a,b)*(\varphi_1,\varphi_2) = (1,0)$

$(a\varphi_1, b\varphi_1+\varphi_2) = (1,0)$

$\Rightarrow a\varphi_1 = 1 \Rightarrow \varphi_1 = 1/a$

$b\varphi_1+\varphi_2 = 0 \Rightarrow b\cdot\frac{1}{a}+\varphi_2 = 0$

$$y_2 = -b/a$$

luego, revisamos

$$(1/a, -b/a) * (a,b) = (1/a \cdot a, -b/a \cdot a + b)$$
$$= (1, 0) \quad \checkmark$$

Todos los elementos con $a \neq 0$ son invertibles, y sus inversos son $(1/a, -b/a) \in \mathbb{R}^2$

d) Idempotentes

$$(a,b) * (a,b) = (a,b)$$
$$\Leftrightarrow (a^2, ab+b) = (a,b)$$
$$\Leftrightarrow a^2 = a \wedge ab+b = b$$
$$\Leftrightarrow a^2 - a = 0 \wedge ab = 0$$
$$\Leftrightarrow a(a-1) = 0 \wedge ab = 0$$

La primera ecuación tiene 2 soluciones $a=0 \vee a=1$

si $a=0$, entonces $ab=0$ siempre es cierta, por lo que b queda libre

si $a=1$, entonces $ab=0$ implica que $b=0$

Así, los idempotentes son $(1,0)$ y los elementos de la forma $(0,b)$ con $b \in \mathbb{R}$

e) → operar $(3,1)^{-1}$

→ neutro!

→ operar con $(2,-7)^{-1}$

→ neutro!

→ luego calcular !!!

y asoc!

Les voy a dejar 1 ejercicio más (similar a P2), con la técnica 3, "dividir para contar"

Dem que $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \text{ es finito}\}$ es numerable

c) PDQ: $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \text{ es finito}\}$ es numerable

¡Dividir para contar!

Notemos que si A es finito, $|A| = n$. Podemos dividir a A por el tamaño

$$\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |A| = n\}$$

$$\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$$

Para partir, $\mathcal{H}_0 = \{\emptyset\}$ y $|\mathcal{H}_0| = 1$. Con lo que $\mathcal{H}_0$ es finito

1) Para $n \geq 1$, veamos que $\mathcal{H}_n$ es numerable

Podemos tomar los conjuntos de la forma $\{k+1, k+2, \dots, k+n\} \in \mathcal{H}_n$, $k \in \mathbb{N}$

de n elementos y tenemos infinitos de ellos (uno por cada $k \in \mathbb{N}$)

$\therefore |\mathbb{N}| \leq |\mathcal{H}_n|$, pues $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito

2) Notemos que dado $A \in \mathcal{H}_n$, podemos escribir

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ para ciertos $a_i \in \mathbb{N}$

Nos motiva a "parametrizar" según una n-tupla

Como A tiene n elementos, consideremos la tupla de esos n elementos, consideremos la tupla de esos n elementos ordenados ascendentemente.

Ej: $n=5$ $\quad X = \{18, 1, 34, 1510, 430\} \in \mathcal{H}_5$

$f(X) = (1, 18, 34, 430, 1510) \in \mathbb{N}^5$

Así, sea $f : \mathcal{H}_n \longrightarrow \overbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}^{n \text{ veces}}$

$A \longmapsto f(A) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

(ordenados y de menor a mayor

Como solo queremos ver que $|\mathcal{H}_n| \leq |\mathbb{N}|$, basta ver que f es inyectiva

En efecto, sean $A, B \in \mathcal{H}_n$ tq $f(A) = f(B)$. PDQ: $A = B$

Esto es directo, pues si $f(A) = f(B)$

$$\Rightarrow (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$$ Los elementos de A son exact. los de B

$$\Rightarrow A = B$$

$\therefore$ f es inyectiva, sigue que

$$|\mathcal{H}_n| \leq |\underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{n \text{ veces}}| = |\mathbb{N}|$$

Como $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{H}_n| \wedge |\mathcal{H}_n| \leq |\mathbb{N}|$

$$\therefore |\mathcal{H}_n| = |\mathbb{N}|$$

Así, como $\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ es unión numerable de conjuntos numerables, entonces $\mathcal{H}$ es num