Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de plan común
MA-1101 – Introducción al Algebra

Auxiliar 17

Conjuntos numerables y Estrcutura Algebraicas

Profesor: José Soto
Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas

P1.- Muestre que los siguientes conjuntos son numerables:

(a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N},\ x = \frac{k}{3^n}\right\}$

(b) $B = \left\{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$

(c) $A = \{x \in [0, \infty) \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x^n \in \mathbb{N}\}$.

(d) Muestre que el conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable

P2.- Demuestre que el conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ con cardinal menor o igual a 2 es numerable.
Es decir, pruebe que el conjunto

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |A| \leq 2\}$$

es numerable.

P3.- Definimos en $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ según:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d).$$

(a) Verifique si $*$ es o no conmutativa y/o asociativa.

(b) Encuentre el neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$.

(c) Determine qué elementos son invertibles y calcule sus inversos.

(d) Determine los elementos idempotentes de la estructura.

(e) Resuelva la ecuación $(3,1) * (x,y) * (2,-7) = (72,43)$ en $\mathbb{R}^2$.

Recordatorio: Relaciones

(1) Propiedades dd relaciones

Sean A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación binaria en A:

- **Reflexiva:** $\forall a \in A,\ a\,\mathcal{R}\,a$
- **Simétrica:** $\forall a,b \in A,\ a\,\mathcal{R}\,b \Rightarrow b\,\mathcal{R}\,a$
- **Antisimétrica:** $\forall a,b \in A,\ a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,a \Rightarrow a = b$
- **Transitiva:** $\forall a,b,c \in A,\ a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,c \Rightarrow a\,\mathcal{R}\,c$

(2) Clasificación de relaciones:

- **Relación de equivalencia:** Cumple ser reflexiva, simétrica y transitiva.
- **Relación de orden:** Cumple ser reflexiva, antisimétrica y transitiva.
  - **Orden total:** Todo par de elementos en A es comparable, es decir, $\forall a,b \in A$, se cumple $a\,\mathcal{R}\,b$ o $b\,\mathcal{R}\,a$.
  - **Orden parcial:** Relación de orden que no es total.

(3) Clases de equivalencia

Dado un elemento $a \in A$, la clase de equivalencia de a asociada a la relación $\mathcal{R}$ se define como:

$$[a]_{\mathcal{R}} := \{x \in A : a\,\mathcal{R}\,x\} \subseteq A$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia se llama **conjunto cociente** y se denota por:

$$A/\mathcal{R} := \{[a]_{\mathcal{R}} : a \in A\}$$