P1

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

a)

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{4n-2k} (-1)^k \binom{2n}{2n-k} \binom{4n-2k}{j}$$

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{4n-2k} (-1)^k \binom{2n}{2n-k} \binom{4n-2k}{j} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{2n-k} \sum_{j=0}^{4n-2k} \binom{4n-2k}{j}$$

indep subíndice

$$= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{2n-k} \sum_{j=0}^{4n-2k} \binom{4n-2k}{j} 1^j \cdot 1^{4n-2k-j} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{2n-k} 2^{4n-2k}$$

Bin de Newton!

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2n-k} (-1)^k \cdot 2^{4n-2k}$$

fallas!

Arreglemos 1 por 1, partamos por la combinatoria, $\binom{2n}{2n-k} = \binom{2n}{k}$! super,

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k \cdot 2^{4n-2k}$$

Debería estar elevado a $2n-k$, podemos reescribir $2(2n-k)$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \cdot (-1)^k \cdot 2^{2(2n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 4^{2n-k}$$

Binomio de Newton!

$$= (4-1)^{2n} = 3^{2n} = 9^n \quad //$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$$

Vemos que tenemos algo similar a una telescopica! Porque vemos un k y un $k+2$

Arreglemosla para que este en una +/-

Aplicamos fracciones parciales!

$$\frac{2}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}$$

$$2 = A(k+2) + Bk$$

$$k\cdot 0 + 2 = k(A+B) + 2A$$

luego, separamos $0 = k(A+B) \Rightarrow A+B=0 \rightarrow B=-1$

$2 = 2A \Rightarrow A = 1$

Finalmente, lo devolvemos a la sumatoria

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

Ahora vemos lo que nos asemeja a una telescopica

CI560 $\binom{6}{3}$

Existen 2 formas de resolver esta

F1| Por medio de la formula telescopica $\sum_{i=k}^{m} a_{i+1} - a_i = a_{m+1} - a_k$

¿Que sucede? Tenemos a_i y a_{i+2}, nikitanipone!

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underbrace{- \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1}}_{1} - \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \underset{a_i}{\frac{1}{k}} - \underset{a_{i+1}}{\frac{1}{k+1}} + \sum_{k=0}^{n} \underset{a_i}{\frac{1}{k+1}} - \underset{a_{i+1}}{\frac{1}{k+2}}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = 1 + 1/2 - \frac{n+2+(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 3/2 - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$$

F2| Revisemos como está funcionando la sumatoria, desarrollando los primeros terminos

$$\sum^{n}$$

$$\sum_{k=1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

$$\underbrace{\overset{k=1}{\frac{1}{1}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{1} + \underbrace{\overset{k=2}{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{4}}}_{2} + \underbrace{\overset{k=n-1}{\cancel{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{5}}_{3} + \underbrace{\overset{k=n}{\cancel{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{6}}_{4}$$

luego, $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)+2} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{n+2+n+1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

P3

Dados $a, b \in \mathbb{N}$ fijos, con $a \geq 1$, $b \geq 2$ se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$x\mathcal{R}y \iff b|ax+y, \text{ es decir, } b \text{ divide a } ax+y$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es refleja si y sólo si $b|(a+1)$.

b) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $b|(a^2-1)$.

c) Determine valores de a y b tal que $\mathcal{R}$ no sea antisimétrica.

a) PDQ: $\mathcal{R}$ es refleja $\iff b|(a+1)$

$\boxed{\Rightarrow}$ PDQ: $\mathcal{R}$ refleja $\Rightarrow b|(a+1)$

$\mathcal{R}$ refleja $\iff \forall x \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}x \iff b|(a+1)x$

(si un número divide todos los múltiplos de un número, entonces lo divide tb)

En particular, tb podemos tomar $x=1$,

Así, tenemos $b|(a+1)$ ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ PDQ: $\forall x \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}x \Leftarrow b|ax+x$

Sea $x \in \mathbb{Z}$, notamos que $b|a+1$

$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{Z}$ tq $bd = a+1 \quad / \cdot x$

$\Rightarrow b\underbrace{dx}_{\in \mathbb{Z}} = ax+x \Rightarrow b|ax+x$ ✓

b) PDQ: Si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $b|(a^2-1)$

$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

$b|ax+y \Rightarrow b|ay+x$

b divide a $(ax+y) \Rightarrow$ b divide a $(ay+x)$

Existe k, k' tq $ax+y = bk \wedge ay+x = bk'$ ♥

Así, tenemos $y = bk - ax$, lo insertamos en ♥: $abk - a^2x + x = bk'$

$$b\underbrace{(ak-k')}_{k''} = x(a^2-1)$$

Así, $b \mid x(a^2-1)$ y como esto se cumple $\forall x \in \mathbb{Z}$, tenemos que $b \mid (a^2-1)$

c) $\mathcal{R}$ no sea antisimetrica $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \not\Rightarrow x=y$

Si tomamos $a=b=2$

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2 \mid 2x+y \longrightarrow 2x+y=2k$

$y\mathcal{R}x \Leftrightarrow 2 \mid 2y+x \longrightarrow 2y+x=2k'$

Luego, no es necesario que $x=y$ para que se cumpla!

$x=2 \wedge y=0$

Tenemos $2\cdot2+0 = 4 \overset{\checkmark}{=} 2\cdot \overset{2}{k}$

$2\cdot0+2 = 2 \overset{\checkmark}{=} 2\cdot \overset{1}{k}$