



Auxiliar 15

Preparación C4

Profesor: José Soto San Martín

Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas

P1.-

(a)

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{4n-2k} (-1)^k \binom{2n}{2n-k} \binom{4n-2k}{j}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)}$$

P2.-

Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define para todo $j \in \mathbb{N}$:

$$S_j = \sum_{i=0}^n i^j$$

a) Demuestre que:

$$\sum_{l=0}^j \binom{j+1}{l} S_l = (n+1)^{j+1}$$

b) Pruebe que:

$$S_j = \frac{(n+1)^{j+1} - \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j+1}{l} S_l}{j+1}$$

P3.-

Dados $a, b \in \mathbb{N}$ fijos, con $a \geq 1$, $b \geq 2$, se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$x \mathcal{R} y \iff b \mid (ax + y), \text{ es decir, } b \text{ divide a } ax + y$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es refleja si y sólo si $b \mid (a+1)$.

b) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $b \mid (a^2 - 1)$.

c) Determine valores de a y b tal que $\mathcal{R}$ no sea antisimétrica.

P4.-

Sea $\mathcal{F} := \{f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{N}, f \text{ es función}\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{F}$ tal que para cada $f, g \in \mathcal{F}$:

$$f \mathcal{R} g \iff \text{Dom}(f) \subseteq \text{Dom}(g) \wedge \forall x \in \text{Dom}(f), f(x) \mid g(x)$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación refleja, antisimétrica y transitiva.

P5.-

Sea $f : A \rightarrow B$ una función y S una relación refleja, simétrica y transitiva en B . Se define la relación $\mathcal{R}$ en A tal que para cada $a, b \in A$:

$$a\mathcal{R}b \iff f(a) S f(b)$$

Pruebe que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva.

Resumen

• Secuencia de Números Reales

Una secuencia de números reales es una función $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{N}$. Para cada $i \in I$, denotaremos $a_i = a(i)$, con $a = (a_i)_{i \in I}$.

Si el conjunto de índices $I = \{i \in \mathbb{N} : i \geq m\}$ para cierto $m \in \mathbb{N}$, entonces escribiremos la secuencia $(a_i)_{i \in I}$ como $(a_i)_{i \geq m}$.

• Sumatoria

Sea $(a_i)_{i \geq m}$ una secuencia de números reales. Para $n \geq m$, se define recursivamente la sumatoria:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \begin{cases} a_m, & \text{si } n = m, \\ a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k, & \text{si } n > m. \end{cases}$$

Si $n < m$, diremos que $\sum_{k=m}^n a_k = 0$.

• Propiedades Sumatorias

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, y $(a_k)_{k \geq m}$, $(b_k)_{k \geq m}$ dos secuencias. Para todo $n \geq m$ se tiene:

$$- \sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1. \quad (\text{Secuencia constante igual a 1})$$

$$- \sum_{k=m}^n \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=m}^n a_k. \quad (\text{Factorización de constantes})$$

$$- \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{k=m}^n b_k. \quad (\text{Sumatoria de dos secuencias})$$

$$- \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s} = \sum_{k=m-s}^{n-s} a_{k+s}. \quad (\text{Traslación de índices, para } s \in \mathbb{N})$$

$$- \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^s a_k + \sum_{k=s+1}^n a_k. \quad (\text{Separación del conjunto de índices, para } m \leq s < n)$$

$$- \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}. \quad (\text{Propiedad telescópica})$$

• Sumatorias Clásicas

$$- \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$- \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$- \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$- \sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

- **Cambio de Índices**

Sean $n \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ biyectiva. Entonces, si definimos la sucesión $b_k = a_{f(k)}$, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$$

- **Sumatoria sobre Conjunto de Índices**

Sean $n \in \mathbb{N}$, $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \Omega$ biyectiva. Entonces, para $b_k = a_{f(k)}$, se define:

$$\sum_{w \in \Omega} a_w = \sum_{k=1}^n b_k$$

- **Separación de Suma**

Sean $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ disjuntos ($I \cap J = \emptyset$). Entonces:

$$\sum_{k \in I \cup J} a_k = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in J} a_k$$

- **Intercambio de Sumatorias**

Para una sumatoria doble de la forma $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{k,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{k,j}$

- **Coefficiente Binomial**

Para $k, n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, n\}$ se define:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

.

Si $k > n \geq 0$, diremos que $\binom{n}{k} = 0$.

- **Propiedades Coeficiente Binomial**

Para n y k enteros con $n \geq 0$:

$$- \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$- \text{Identidad de Pascal: } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

- **Binomio de Newton**

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- **Relación**

Una tripleta de conjuntos $(A, B, \mathcal{R})$ es una relación si cumple $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Para $(a, b) \in A \times B$, denotaremos $a\mathcal{R}b$ cuando $(a, b) \in \mathcal{R}$. El conjunto A se llama el dominio de la relación y el conjunto B se llama el codominio de la relación. A modo de convención, se dirá que $\mathcal{R}$ es una relación en $A \times B$, y si $B = A$, diremos que $\mathcal{R}$ es una relación en A .

- **Propiedades de Relaciones**

Se dice que la relación $\mathcal{R}$ en A es:

- **Refleja:** si $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$.
- **Antisimétrica:** si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \implies x = y$.
- **Simétrica:** si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.
- **Transitiva:** si $\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.

- **Divisibilidad**

En $\mathbb{Z}$ se define la relación divisibilidad, denotada por $|$, como $a|b$ si $\exists q \in \mathbb{Z}, b = qa$. Diremos que a divide a b , b es divisible por a o que b es múltiplo de a .