P1.- Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A, y $\mathcal{R}^*$ en AxA.

$$(a,b)\mathcal{R}^*(a',b') \Leftrightarrow (a\mathcal{R}a') \wedge (b\mathcal{R}^*b')$$

(a) Si R es de orden, demuestre que $\mathcal{R}^*$ también lo es

(b) Muestre que si A tiene al menos dos elementos y $\mathcal{R}$ es un orden total, entonces $\mathcal{R}^*$ es sólo un orden parcial.

(c) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de equivalencia, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

(d) Para $(a,b) \in A \times A$, demuestre que

$$[(a,b)]_{\mathcal{R}^*} = [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}}.$$

a) Si $\mathcal{R}$ es de orden, es refleja, transitiva y antisimetrica

→ Veamos que $\mathcal{R}^*$ sea refleja

PDQ: $\forall (a,b) \in A \times A,\ (a,b)\mathcal{R}^*(a,b)$

En efecto, $(a,b)\mathcal{R}^*(a,b) \Leftrightarrow a\mathcal{R}a \wedge b\mathcal{R}b$

Lo que se cumple porque $\mathcal{R}$ es de orden, en particular refleja, $\therefore$ se cumple que $a\mathcal{R}a \wedge b\mathcal{R}b$

$\therefore \mathcal{R}^*$ es refleja

→ Veamos que $\mathcal{R}^*$ sea antisimetrica

Sean $(a,b),(a',b') \in A \times A$ tq $(a,b)\mathcal{R}^*(a',b') \wedge (a',b')\mathcal{R}^*(a,b) \Leftrightarrow (a\mathcal{R}a' \wedge b\mathcal{R}b') \wedge (a'\mathcal{R}a \wedge b'\mathcal{R}b)$

$\Leftrightarrow (a\mathcal{R}a' \wedge a'\mathcal{R}a) \wedge (b\mathcal{R}b' \wedge b'\mathcal{R}b)$

Pero $\mathcal{R}$ es de orden, en particular, antisimétrica, o sea: $a=a' \wedge b=b'$

Por definición de par ordenado: $(a,b)=(a',b')$

$\therefore \mathcal{R}^*$ es antisimetrica

→ Veamos que $\mathcal{R}^*$ es transitiva

Sean $(a,b),(a',b'),(a'',b'') \in A \times A$ tq $(a,b)\mathcal{R}^*(a',b') \wedge (a',b')\mathcal{R}^*(a'',b'') \Leftrightarrow (a\mathcal{R}a' \wedge b\mathcal{R}b') \wedge (a'\mathcal{R}a'' \wedge b'\mathcal{R}b'')$

$\Leftrightarrow (a\mathcal{R}a' \wedge a'\mathcal{R}a'') \wedge (b\mathcal{R}b' \wedge b'\mathcal{R}b'')$

Pero $\mathcal{R}$ es de orden, en particular, transitiva, o sea: $a\mathcal{R}a'' \wedge b\mathcal{R}b'' \Leftrightarrow (a,b)\mathcal{R}^*(a'',b'')$

$\therefore \mathcal{R}^*$ es transitiva

b) $\mathcal{R}$ es de orden total $(a\mathcal{R}a' \vee a'\mathcal{R}a) \wedge (b\mathcal{R}b' \vee b'\mathcal{R}b)$ ← se cumple!

Ocurre que puede darse $a\mathcal{R}a' \wedge b'\mathcal{R}b$ combinación particular

$(a,b)\mathcal{R}^*(a',b') \Leftrightarrow a\mathcal{R}a' \wedge b\mathcal{R}b' \Leftrightarrow V \wedge F \Leftrightarrow F$

$(a',b')\mathcal{R}^*(a,b) \Leftrightarrow a'\mathcal{R}a \wedge b'\mathcal{R}b \Leftrightarrow F \wedge V \Leftrightarrow F$

$(a,b)\not{\mathcal{R}^*}(a',b') \wedge (a',b')\not{\mathcal{R}^*}(a,b) \therefore \mathcal{R}^*$ es de orden parcial

c) Falta demostrar simetría

Sean $(a,b),(a',b') \in A\times A$ tq. $(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow a\mathcal{R}a' \wedge b\mathcal{R}b' \underset{\mathcal{R}\text{ simétrica}}{\Leftrightarrow} a'\mathcal{R}a \wedge b'\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a',b')\mathcal{R}^*(a,b)$

$\therefore \mathcal{R}^*$ es simétrica

d) Sea $(x,y) \in [(a,b)]_{\mathcal{R}^*} \Leftrightarrow (x,y)\mathcal{R}^*(a,b) \overset{\text{por def}}{\Leftrightarrow} x\mathcal{R}a \wedge y\mathcal{R}b \Leftrightarrow x \in [a]_{\mathcal{R}} \wedge y \in [b]_{\mathcal{R}} \overset{\text{prod cartesiano}}{\Leftrightarrow} (x,y) \in [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}}$

P2.- Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto que satisface
i) $0 \in X$
ii) $\forall r,t \in X, r+t \in X$
(Se sabe que tanto $\mathbb{N}$ como $\mathbb{Z}$ satisfacen lo anterior)
Se define en $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}_X$ como sigue:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_X y \Leftrightarrow (x-y) \in X$$

(a) Demuestre que $\forall X \subseteq \mathbb{R}$ que satisface las condiciones, $\mathcal{R}_X$ es refleja y transitiva

(b) Demuestre que $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ es de orden

(c) Demuestre que $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ es de equivalencia. Además que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$

a) Tenemos que X satisface I y II!

PDQ: $\mathcal{R}$ es refleja

$x \mathcal{R}_X x \Leftrightarrow (x-x) = 0 \in X$ por I

$\therefore \mathcal{R}$ es refleja

PDQ: $\mathcal{R}$ es transitiva

$x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Leftrightarrow (x-y) \in X \wedge (y-z) \in X$

luego, viendo la condición II, si tomamos $(x-y) = r \wedge (y-z) = t$, así, $r+t \in X$, $x-y+y-z = x-z \in X \Leftrightarrow x \mathcal{R} z$

$\therefore \mathcal{R}$ es transitiva

b) Tenemos que $\mathbb{N}$ cumple I, II; por lo tanto solo debemos demostrar antisimetrica

$x \mathcal{R}_{\mathbb{N}} y \wedge y \mathcal{R}_{\mathbb{N}} x \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{N} \wedge (y-x) \in \mathbb{N}$

Lo cual, es equivalente a decir que $a = x-y \wedge -a = y-x$

Pero, para que $a \wedge -a \in \mathbb{N}$, a debe ser 0, volviendo a la igualdad de a, tenemos $0 = x-y$

Reescribiendo, $x = y$

$\therefore$ se concluye que es antisimetrica

$\therefore \mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ es de orden

c) Tenemos que $\mathbb{Z}$ cumple I, II; por lo tanto solo debemos demostrar simetrica

$x \mathcal{R}_{\mathbb{Z}} y \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r = (x-y) \in \mathbb{Z}$

Pero, se sabe que si $r \in \mathbb{Z}$, entonces $-r \in \mathbb{Z}$, luego, $-r = -x+y = y-x$. Así, $(y-x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y \mathcal{R}_{\mathbb{Z}} x$

Veamos que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z} \ \forall p \in \mathbb{Z}$

Sea $p \in \mathbb{Z}$ lo demostraremos por doble inclusión

$\subseteq$| Si $q \in [p]_{\mathcal{R}_\mathbb{Z}}$, tenemos que $(p-q) \in \mathbb{Z}$. Esto significa que existe $n \in \mathbb{Z}$ tq $p-q=n$

$\therefore$ $q = n-p \in \mathbb{Z}$, ya que la resta de dos números enteros también es entero

$\supseteq$| Si $q \in \mathbb{Z}$, tenemos que $(p-q) \in \mathbb{Z}$, porque la resta de 2 números enteros también es entero.

Así, $p \mathcal{R}_\mathbb{Z} q$, por lo que $q \in [p]_{\mathcal{R}_\mathbb{Z}}$

$\therefore$ se concluye que $[p]_{\mathcal{R}_\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

P3.- Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por:

$$x \mathcal{R} y \iff xy > 0.$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Calcule el conjunto cociente $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$.

$x \mathcal{R} x \Leftrightarrow xx > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$ ✓

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xy > 0 \Leftrightarrow yx > 0 \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$ ✓

$x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Leftrightarrow xy > 0 \wedge yz > 0$ luego $\underbrace{(xy)}_{>0}\underbrace{(yz)}_{>0} > 0$

$(xz)y^2 > 0$

$xz > 0 \Leftrightarrow x \mathcal{R} z$

Se deben determinar las clases de equivalencia

$[x]_\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R}-\{0\} \mid x \mathcal{R} y\} = \{y \in \mathbb{R}-\{0\} \mid xy > 0\}$

Es decir, $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ considero todos los reales no nulos

$x > 0$ $[x]_\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R}-\{0\} \mid y > 0\} = \mathbb{R}^+$

$x < 0$ $[x]_\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R}-\{0\} \mid y < 0\} = \mathbb{R}^-$

Luego, el conjunto cociente: $\dfrac{\mathbb{R}-\{0\}}{\mathcal{R}} = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}$

P4| Propuesta

$\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$

$a \mathcal{R} c \Leftrightarrow (c-a) \in (0,1,-1)$

Evalue si es que se cumplen los propiedades de las relaciones, para la relación $\mathcal{R}$

1)
PDQ: Refleja

$a \mathcal{R} a \Leftrightarrow a-a=0$ ✓

2)
Analicemos transitividad

¿Qué pasa si tomamos 1,2,3?

$1\mathcal{R}2 \wedge 2\mathcal{R}3 \Leftrightarrow (1-2)=-1 \wedge (2-3)=-1$

Pero! $1 \not\mathcal{R} 3$ porque $(1-3)=-2 \notin (0,1,-1)$

3)
PDQ: Simetrica

$a \mathcal{R} c \Leftrightarrow (a-c) \in (0,1,-1) \xrightarrow{\cdot -1} (c-a) \in (0,1,-1) \Leftrightarrow c \mathcal{R} a$

$0 \cdot -1 = 0$
$1 \cdot -1 = -1$
$-1 \cdot -1 = 1$

4)
Analicemos antisimetría,

la relación funciona con 1 de dif o 0,

o sea $n\mathcal{R}n$, $n\mathcal{R}n+1$, $n+1\mathcal{R}n$

$n-n=0$ ✓ $n-(n+1)=-1$ ✓ $n+1-n=1$ ✓

Entonces $n\mathcal{R}n' \wedge n'\mathcal{R}n$ no necesariamente implica que sean iguales, pueden ser $n=n \wedge n'=n+1$!

Resumen

$(A,B,\mathcal{R})$ $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ A dominio relación $\wedge$ B codominio relación

- $(a,b) \in A \times B$
  - $a \mathcal{R} b$ cuando $(a,b) \in \mathcal{R}$
  - $a \not\mathcal{R} b$ cuando $(a,b) \notin \mathcal{R}$
- $\mathcal{R}$ relación en $A \times B$
- $\mathcal{R}$ relación en $A \times A = \mathcal{R}$ relación en A

Propiedades $\mathcal{R}$ en A

- Refleja: $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$
- Simétrica: $\forall x,y \in A, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- Antisimétrica: $\forall x,y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x=y$
- Transitiva: $\forall x,y,z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z$

Tipo relaciones

- Orden: Refleja, Transitiva, Antisimetrica

xRy : x precede a y

→ orden total : si son comparables $xRy \vee yRx$

→ orden parcial: <u>NO</u> son comparables

↳ Equivalencia: Refleja, Transitiva, Simetrica

└ Clase equivalencia: $[a]_R = \{x \in A \mid aRx\} \subseteq A$

└ $\forall a \in A, [a]_R \neq \emptyset$

- aRb
- $b \in [a]_R$
- $[b]_R \subseteq [a]_R$
- $[a]_R = [b]_R$
- $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

↳ conjunto cociente: conjunto de los clases de equivalencia

$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$

- conjunto A/R es una partición de A

*Divisibilidad : $a|b$ si existe $c \in \mathbb{Z}$ tq $b = ca$

OJO: $a \equiv_n b \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{n}$