Auxiliar 14

Relaciones

Profesor: José Soto
Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas

P1.- Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A, y $\mathcal{R}^*$ en AxA.

$$(a,b)\mathcal{R}^*(a',b') \Leftrightarrow (a\mathcal{R}a') \wedge (b\mathcal{R}^*b')$$

(a) Si R es de orden, demuestre que $\mathcal{R}^*$ también lo es

(b) Muestre que si A tiene al menos dos elementos y $\mathcal{R}$ es un orden total, entonces $\mathcal{R}^*$ es sólo un orden parcial.

(c) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de equivalencia, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

(d) Para $(a,b) \in A \times A$, demuestre que

$$[(a,b)]_{\mathcal{R}^*} = [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}}.$$

P2.- Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto que satisface
i) $0 \in$ X
ii) $\forall r, t \in X, r + t \in X$
(Se sabe que tanto $\mathbb{N}$ como $\mathbb{Z}$ satisfacen lo anterior)
Se define en $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}x$ como sigue:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}xy \Leftrightarrow (x - y) \in X$$

(a) Demuestre que $\forall X \subseteq \mathbb{R}$ que satisface las condiciones, $\mathcal{R}$x es refleja y transitiva

(b) Demuestre que $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ es de orden

(c) Demuestre que $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ es de equivalencia. Además que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$

P3.- Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por:

$$x \mathcal{R} y \iff xy > 0.$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Calcule el conjunto cociente $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$.

Propuesto.- Sea $\mathcal{H}$ la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(a, b)\mathcal{H}(c, d) \iff a + b \equiv_2 c + 3d$$

(a) Pruebe que $\mathcal{H}$ es relación de equivalencia.

(b) Muestre que $[(0, 0)]_{\mathcal{H}} \cup [(1, 0)]_{\mathcal{H}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $[(0, 0)]_{\mathcal{H}} \cap [(1, 0)]_{\mathcal{H}} = \emptyset$.

(c) Determine $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathcal{H}$.

You can take away my house, all my tricks, and toys, but one thing you cant take away...

Recordatorio: Relaciones

(1) Propiedades dd relaciones

Sean A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación binaria en A:

- **Reflexiva:** $\forall a \in A,\ a \mathcal{R} a$
- **Simétrica:** $\forall a, b \in A,\ a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$
- **Antisimétrica:** $\forall a, b \in A,\ a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a \Rightarrow a = b$
- **Transitiva:** $\forall a, b, c \in A,\ a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$

(2) Clasificación de relaciones:

- **Relación de equivalencia:** Cumple ser reflexiva, simétrica y transitiva.
- **Relación de orden:** Cumple ser reflexiva, antisimétrica y transitiva.
  - **Orden total:** Todo par de elementos en A es comparable, es decir, $\forall a, b \in A$, se cumple $a \mathcal{R} b$ o $b \mathcal{R} a$.
  - **Orden parcial:** Relación de orden que no es total.

(3) Clases de equivalencia

Dado un elemento $a \in A$, la clase de equivalencia de a asociada a la relación $\mathcal{R}$ se define como:

$$[a]_{\mathcal{R}} := \{x \in A : a \mathcal{R} x\} \subseteq A$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia se llama **conjunto cociente** y se denota por:

$$A/\mathcal{R} := \{[a]_{\mathcal{R}} : a \in A\}$$