

- a) Sean A, B conjuntos, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$. Considere la función $f: A \times B \rightarrow A$ definida por $f(x, y) = x$.
 i) (2.0 pts.) Demuestre que $f^{-1}(C) = C \times B$.

Sea $(x, y) \in A \times B$ cualquiera,

$$(x, y) \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow \{x, y\} \in C \quad \text{def. preimagen}$$

$$\Leftrightarrow x \in C \quad \text{def. } f$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge y \in B \quad (x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in C \times B$$

- ii) (2.0 pts.) Si $D \neq \emptyset$, demuestre que $f(C \times D) = C$.

Sea $x \in A$ cualquiera,

$$x \in f(C \times D) \Leftrightarrow \exists (u, v) \in C \times D, f(u, v) = x \quad \text{def. imagen}$$

$$\Leftrightarrow \exists (u, v) \in C \times D, u = x \quad \text{def. } f$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in C, \exists v \in D, u = x \quad \text{producto cartesiano}$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in C, u = x \quad \text{no hablamos de } v$$

$$\Leftrightarrow x \in C \quad x \text{ siempre va a estar en } C$$

Sean A, B, C, D conjuntos y $f: A \rightarrow B$ y $g: C \rightarrow D$ dos funciones biyectivas. Definamos

$$\mathcal{F}(A, C) = \{h: A \rightarrow C \mid h \text{ es función.}\},$$

$$\mathcal{F}(B, D) = \{h: B \rightarrow D \mid h \text{ es función.}\}.$$

Considere $\mu: \mathcal{F}(A, C) \rightarrow \mathcal{F}(B, D)$ dada por $\mu(h) = g \circ h \circ f^{-1}$.

1. Pruebe que μ es biyectiva.

2. Pruebe que:

(a) h es inyectiva $\Leftrightarrow \mu(h)$ es inyectiva.

(b) h es epiyectiva $\Leftrightarrow \mu(h)$ es epiyectiva.

1. Vamos a exhibir la inversa

$$\delta: \mathcal{F}(B, D) \rightarrow \mathcal{F}(A, C) \text{ como } \delta(l) = g^{-1} \circ l \circ f$$

Notemos que está bien definida, porque si $l \in \mathcal{F}(B, D)$ entonces $g^{-1} \circ l \circ f$

$$h \in \mathcal{F}(A, C)$$

Esto porque $a \in A \Rightarrow f(a) \in B \Rightarrow l(f(a)) \in D \Rightarrow \underbrace{g^{-1}(l(f(a)))}_{g^{-1} \circ l \circ f(a)} \in C$
 $g^{-1} \circ l \circ f(a) = \delta(l)$

Si $h \in \mathcal{F}(A, C)$:

$$\begin{aligned} \delta \circ \mu(h) &= \delta(g \circ h \circ f^{-1}) \\ &= g^{-1}(g \circ h \circ f^{-1}) \circ f \\ &= (g^{-1} \circ g) \circ h \circ (f^{-1} \circ f) \\ &= Id_C \circ h \circ Id_A \\ &= h \end{aligned}$$

$$\therefore \delta \circ \mu(h) = id_{\mathcal{F}(A, C)}$$

Si $l \in \mathcal{F}(B, D)$

$$\begin{aligned} \mu \circ \delta(l) &= \mu(g^{-1} \circ l \circ f) = g \circ (g^{-1} \circ l \circ f) \circ f^{-1} \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ l \circ (f \circ f^{-1}) \\ &= id_B \circ l \circ id_D \quad \begin{matrix} \text{donde pinto} \\ \text{p donde termino} \end{matrix} \\ &= l \end{aligned}$$

$$\therefore \mu \circ \delta = Id_{\mathcal{F}(B, D)}$$

$$\therefore \mu^{-1} = \delta$$

2. μ es inyectiva $\Leftrightarrow \mu(h)$ inyectiva

$\Rightarrow$ si h es inyectiva

$\Rightarrow h \circ f^{-1}$ es inyectiva

(pq f es biy, f^{-1} es biy) $\nearrow$

$\Rightarrow g \circ h \circ f^{-1}$ es inyectiva composición función iny
 $= u(h)$ " "

$\Leftarrow$ $u(h) = g \circ h \circ f^{-1}$ es inyectiva

$u(h) \in \mathcal{F}(B, D)$ ie $u(h)$ es una función $\pi: B \rightarrow D$

wego, $g \circ h \circ f^{-1} = r \leftarrow$ inyectiva $f^{-1}(C)$

$g \circ h = r \circ f$ inyective pq f es biy (iny) y r tb iny

wego, como $g \circ h$ es inyectiva

h es inyectiva

(aob iny $\Rightarrow$ b iny)