P1.- Sea $f : E \to F$ una función. Pruebe que:

(a) $\forall A \subseteq F,\ f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

(b) $\forall A, B \subseteq F,\ f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

(c) $\forall A, B \subseteq E,\ f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

(d) f es inyectiva $\iff \forall A, B \subseteq E,\ f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$.

a) $x \in f^{-1}(A^c) \iff f(x) \in A^c$ Def $(\ )^c$

$\iff f(x) \notin A$ Def $\notin$

$\iff \overline{f(x) \in A}$ Def preimagen

$\iff \overline{x \in f^{-1}(A)}$ Def $\notin$

$\iff x \notin f^{-1}(A)$ Def $(\ )^c$

$\iff x \in (f^{-1}(A))^c$

b) Ocupemos propiedades de la preimagen

$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A \cap B^c)$ Def $\setminus$

$= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B^c)$ $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

$= f^{-1}(A) \cap (f^{-1}(B))^c$ por a)

$= f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ Def $\setminus$

c) El conjunto imagen no se porta bien >:c

Sea $y \in f(A) \setminus f(B)$, PDQ: $y \in f(A \setminus B)$

Como $y \in f(A) \setminus f(B)$

$\Rightarrow y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$ Def $\setminus$

$\Rightarrow \exists x \in A$ tq $f(x) = y \wedge y \notin f(B)$ Def imagen

Qué es lo que queremos ver? $y \in f(A \setminus B)$, o sea, $\exists z \in A \setminus B$ tq $f(z) = y$

Queremos encontrar un z tq, $z \in A$, $z \notin B \wedge f(z) = y$

Pero qué pasa? ya tenemos un x que cumple 2 de 3

Basta con que $x \notin B$

Supongamos entonces por contradicción que $x \in B \Rightarrow f(x) \in f(B)$ Def imagen

Pero! $f(x) = y \Rightarrow y \in f(B)$

$\divideontimes$ por

Luego, necesariamente $x \notin B$

Con esto, tenemos que $x \in A \setminus B$ y $f(x) = y$

$\Rightarrow y \in f(A \setminus B)$

$\therefore f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ qed

d) Supongamos que f es iny y probemos que $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$

$\subseteq$) Lista de la parte c) (este es un caso particular del c)

$\supseteq$) Sea $y \in f(A \setminus B)$, PDQ: $y \in f(A) \setminus f(B)$ [Es decir, queremos probar que $y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$]

Como $y \in f(A \setminus B)$

$\Rightarrow \exists x \in A \setminus B$ tq $f(x) = y$ Def imagen

Como $x \in A \setminus B$, en particular $x \in A$!

$\Rightarrow \exists x \in A$ tq $f(x) = y$

$\Rightarrow y \in f(A)$ Def imagen

Falta ver que $y \notin f(B)$. Veamos por contradicción

Si $y \in f(B)$

$\Rightarrow \exists z \in B$ tq $f(z) = y$ Def imagen

En tenemos que $\exists x$ $A \setminus B$ tq $f(x) = y$

$\Rightarrow f(x) = f(z)$

$\Rightarrow x = z$ f inyectiva

Pero $z \in B$ y $x \in A \setminus B$, es decir, $x \notin B$

porque si $x = z$ no puede ser $z \in B$ y $x \notin B$

Luego, necesariamente $y \notin f(B)$

$\Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B)$

$f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$

Luego $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$

P2.- Sean $f : A \to B$ una función y $C, D \subseteq f(A)$. Pruebe que:

(a) $C \cup D = f(A) \implies f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = A$

(b) $C \cap D = \emptyset \implies f(f^{-1}(C)) \cap f(f^{-1}(D)) = \emptyset$

(c) Un conjunto $C \subseteq A$ se dice *estable para* f si

$$f^{-1}(f(C)) = C.$$

(c.i) Demuestre que si C y D son estables para f, entonces $C \cup D$ también lo es.

(c.ii) **(Prop)** Demuestre que para todo $C \subseteq A$, el conjunto $D = f^{-1}(f(C))$ es estable para f.

a) $C \cup D = f(A) \quad / f^{-1}()$

$\Rightarrow f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(f(A))$

$\Rightarrow f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(f(A))$ propiedad

$\Rightarrow f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = A$ $f^{-1}(f(A)) = A$ porque A es el dominio de f

b) Hay una propiedad que nos relaciona $f(f^{-1}(X))$ con X : $f(f^{-1}(X)) \subseteq X$

Aplicándola para $X = C$ y $X = D$ tenemos que $f(f^{-1}(X)) \subseteq X$

$f(f^{-1}(C)) \subseteq C$

Luego, si tomamos $f(f^{-1}(X)) \cap f(f^{-1}(C)) \subseteq X \cap C$

$\Rightarrow f(f^{-1}(X)) \cap f(f^{-1}(C)) \subseteq \emptyset$ Por hipotesis

Pero que pasa? El unico subconjunto del $\emptyset$ es el $\emptyset$!

Finalmente, $f(f^{-1}(X)) \cap f(f^{-1}(C)) = \emptyset$ ~~qed~~

c.I) C y D estables, $f^{-1}(f(C)) = C \wedge f^{-1}(f(D)) = D$ esta es la hipotesis! lo que sabemos !!!

Nos piden ver que pasa con $C \cup D$,

$$f^{-1}(f(C \cup D)) \underset{\text{prop}}{=} f^{-1}(f(C) \cup f(D)) \underset{\text{prop}}{=} f^{-1}(f(C)) \cup f^{-1}(f(D)) \underset{\text{hip}}{=} C \cup D$$

$\therefore$ $C \cup D$ es estable

P3.- Sea A un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{F} = \{f : A \to A \mid f \text{ es una función}\}$, es decir, $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las funciones de A en A. Sea $g : A \to A$ una función biyectiva. Se define la función $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ por

$$\varphi(f) = g \circ f.$$

(a) Sea $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ definido por:

$$\mathcal{H} = \{f : A \to A \mid f \text{ es una función biyectiva}\}.$$

(i) Demuestre que, para todo $h \in \mathcal{H}$, existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $g \circ f = h$.

(ii) **(Prop.)** A partir de (i), concluya la siguiente igualdad de conjuntos: $\varphi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

(b) Demuestre que φ es biyectiva y calcule su inversa.

a.I) hoja aparte! ⌜$g \circ f = h \ / g^{-1} \rightarrow f = g^{-1} \circ h$⌟

Luego si tomamos una $f \in \mathcal{H}$ tq $f = g^{-1} \circ h$ $\in \mathcal{H}$ porque g es biy $\therefore \exists g^{-1}$ biy $\wedge$ $h \in \mathcal{H} \therefore$ es biy. (composición de biy es biy)

Tenemos que $g \circ (g^{-1} \circ h) \underset{\text{Asoc } \circ}{=} (g \circ g^{-1}) \circ h \underset{g \circ g^{-1}}{=} Id_A \circ h \underset{\text{neutro}}{=} h$

b) Vamos a demostrar que es iny, epiy y luego calcular la inversa

PDQ: φ es inyectiva

$$\varphi(f_1) = g \circ f_1 = g \circ f_2 = \varphi(f_2)$$

$$g^{-1} \circ g \circ f_1 = g^{-1} \circ g \circ f_2 \quad / g^{-1}(\,)$$

$$Id_A \circ f_1 = Id_A \circ f_2$$

$$f_1 = f_2$$

$\therefore$ Es inyectiva!

PDQ: φ es epiyectiva

Sea $h \in \mathcal{F}$ y debemos ver que $\exists f \in \mathcal{F}$ tq $\varphi(f) = h$

Si tomamos $f = g^{-1} \circ h$, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= g \circ f \\ &= g \circ (g^{-1} \circ h) \\ &= Id_A \circ h \\ &= Id_A\end{aligned}$$

Concluimos que φ es epiyectiva

Calculemos le inversa de φ.

Sean $f, h \in \mathcal{F}$ tq $\varphi(f) = h$ "despejamos f"

$$\begin{aligned}\varphi(f) = h &\Leftrightarrow g \circ f = h \\ &\Rightarrow g^{-1} \circ g \circ f = g^{-1} \circ h \\ &\Leftrightarrow Id_A \circ f = g^{-1} \circ h \\ &\Leftrightarrow f = g^{-1} \circ h\end{aligned}$$

Luego, definiendo $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ como $\alpha(h) = g^{-1} \circ h$

Tenemos que $\alpha(\varphi(f)) = f \quad \forall f \in \mathcal{F}$.

Como además se tiene que: $\rightarrow Cod(\alpha(\varphi)) = Cod(\alpha) = \mathcal{F} = Cod(id_{\mathcal{F}})$

$\rightarrow Dom(\alpha(\varphi)) = Dom(\varphi) = \mathcal{F} = Dom(id_{\mathcal{F}})$

Así, tenemos $\alpha \circ \varphi = id_{\mathcal{F}}$.

Finally! φ es biy y su inversa: $\varphi^{-1} = \alpha$:)