



Auxiliar 12

Preparación C3

Profesor: José Soto San Martín

Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas

P1.- Sean A, B conjuntos, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$. Considere la función $f : A \times B \rightarrow A$ definida por $f(x, y) = x$.

- Demuestre que $f^{-1}(C) = C \times B$.
- Si $D \neq \emptyset$, demuestre que $f(C \times D) = C$.

P2.- Sean A un conjunto no vacío, $\mathcal{F} = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ es función}\}$, $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ y $g \in \mathcal{H}$. Se define $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que

$$\varphi(f) = g \circ f.$$

- Justifique por qué φ está bien definida.
- Demuestre que $\varphi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.
- Sea $\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ es epiyectiva}\}$. Muestre que

$$\varphi^{-1}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{G} = \mathcal{H}.$$

- Pruebe que φ es biyectiva y calcule su inversa.

P3.-

Sean A, B, C, D conjuntos y $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ dos funciones biyectivas. Definamos:

$$\mathcal{F}(A, C) = \{h : A \rightarrow C \mid h \text{ es función}\}, \quad \mathcal{F}(B, D) = \{h : B \rightarrow D \mid h \text{ es función}\}.$$

Considere $\mu : \mathcal{F}(A, C) \rightarrow \mathcal{F}(B, D)$ dada por

$$\mu(h) = g \circ h \circ f^{-1}.$$

- Pruebe que μ es biyectiva.
- Pruebe que:
 - h es inyectiva $\iff \mu(h)$ es inyectiva.
 - (Propuesto)** h es epiyectiva $\iff \mu(h)$ es epiyectiva.

P4.- Sea E un conjunto de referencia no vacío y $A, B \subseteq E$. Se define $f : \mathcal{P}(A \cup B) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ tal que

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B),$$

y $g : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A \cup B)$ tal que

$$g(W, Z) = W \cup Z.$$

- a) Compruebe que f y g están bien definidas.
- b) Verifique que $g \circ f$ es la función identidad (indique sobre qué conjunto) y concluya que f es inyectiva.
- c) Pruebe que si $B = A^c$, entonces f es epiyectiva.
- d) Muestre, con un contraejemplo, que si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces f no es epiyectiva. Esto es, dé un ejemplo concreto de conjuntos $A, B \subseteq E$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y f no es epiyectiva.

P4.-

Propuesto.-

Resumen

- **Definición de Función**

Diremos que la 3-tupla $f = (A, B, G)$ es función de A en B si $G \subseteq A \times B$ y se cumple que $\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in G$.

Al conjunto A se le llama el dominio de f (conjunto de partida) y se denota $Dom(f)$, al conjunto B se le llama el codominio de f (conjunto de llegada) y se denota $Cod(f)$, y al conjunto $G = \{(a, f(a)) \in A \times B : a \in A\}$ se le llama el grafo de la función.

De forma resumida (como regla de asociación), podemos decir que $f : A \rightarrow B$ es función si $\forall a \in A, \exists! b \in B, f(a) = b$.

- **Igualdad de Funciones**

Si $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ son funciones, entonces:

$$f = g \iff Dom(f) = Dom(g) \wedge Cod(f) = Cod(g) \wedge \forall x \in Dom(f), f(x) = g(x)$$

- **Conjunto de Funciones**

Sean A y B conjuntos, definimos el conjunto de todas las funciones de A en B por:

$$B^A = \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ es función}\}$$

- **Inyectividad**

Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva si:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Equivalentemente (por contrarrecíproca), si se cumple que:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

- **Sobreyectividad (Epiyectividad)**

Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva si se cumple que:

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$

.

- **Biyectividad**

Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

- **Propiedad Biyectividad**

$$f : A \rightarrow B \text{ es biyectiva} \iff \forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x).$$

- **Función Inversa**

Sea $f : A \rightarrow B$ una función biyectiva. Se define la función inversa de f , denotada $f^{-1} : B \rightarrow A$, como la función tal que:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

- **Propiedades Función Inversa**

Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces su inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ cumple que:

- $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$

- **Función Composición**

Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones. Se define la función composición de f y g , denotada $g \circ f : A \rightarrow C$, como la función tal que:

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- **Propiedad Biyectividad y Composición**

Para un conjunto F cualquiera, se define $id_F : F \rightarrow F$ tal que para cada $x \in F$, $id_F(x) = x$. Entonces:

$$f : A \rightarrow B \text{ biyectiva} \implies f \circ f^{-1} = id_B \wedge f^{-1} \circ f = id_A$$

- **Propiedades Composición**

Sean $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$ funciones. Se tiene que:

- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- $id_B \circ f = f$
- $f \circ id_A = f$

- **Propiedades de Composición de Funciones Inyectivas, Epiyectivas y Biyectivas**

Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones. Se tiene que:

- f y g son inyectivas $\implies g \circ f$ es inyectiva
- f y g son epiyectivas $\implies g \circ f$ es epiyectiva
- f y g son biyectivas $\implies g \circ f$ es biyectiva
- $g \circ f$ es inyectiva $\implies f$ es inyectiva
- $g \circ f$ es epiyectiva $\implies g$ es epiyectiva

- **Propiedad Inversa**

Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces f^{-1} es biyectiva y $(f^{-1})^{-1} = f$.

- **Teorema de Cálculo de Inversa**

Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ funciones tales que al menos dos de las siguientes condiciones se satisfacen:

- $g \circ f = id_A$
- $f \circ g = id_B$
- g es biyectiva

Entonces f es biyectiva y g es su inversa ($g = f^{-1}$).

- **Inversa de la Composición**

Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones biyectivas. Entonces:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

- **Imagen y Preimagen**

Sea $f : A \rightarrow B$ una función tal que $f(x) = y$. Se dice que y es la imagen de x a través de f y que x es la preimagen de y a través de f .

- **Conjunto Imagen**

Sea $f : A \rightarrow B$ una función y $A' \subseteq A$. Se define el conjunto imagen de A' por f como:

$$f(A') = \{f(x) \in B : x \in A'\}$$

- **Propiedades Conjunto Imagen**

Sea $f : A \rightarrow B$ una función y $A_1, A_2 \subseteq A$. Entonces:

- f es epiyectiva $\iff f(A) = B$
- $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

- **Conjunto Preimagen**

Sea $f : A \rightarrow B$ una función y $B' \subseteq B$. Se define el conjunto preimagen de B' por f como:

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

- **Propiedades Conjunto Preimagen**

Sea $f : A \rightarrow B$ una función y $B_1, B_2 \subseteq B$. Entonces:

- $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

- **Propiedades Conjunto Imagen y Preimagen**

Sea $f : A \rightarrow B$ una función, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$. Entonces:

- $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$ (si f es inyectiva se tiene la igualdad)
- $f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A)$ (si f es epiyectiva se tiene la igualdad con B')

- **Inyectividad, Epiyectividad y Biyectividad en Conjunto Preimagen**

Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces:

- f es inyectiva $\iff \forall y \in B, (f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \vee \exists! x \in A, f^{-1}(\{y\}) = \{x\})$
- f es epiyectiva $\iff \forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$
- f es biyectiva $\iff \forall y \in B, \exists! x \in A, f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$