Auxiliar 11

Conjuntos Imagen y Preimagen

Profesor: José Soto
Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas

P1.- Sea $f : E \to F$ una función. Pruebe que:

(a) $\forall A \subseteq F,\ f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

(b) $\forall A, B \subseteq F,\ f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

(c) $\forall A, B \subseteq E,\ f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

(d) f es inyectiva $\iff \forall A, B \subseteq E,\ f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$.

P2.- Sean $f : A \to B$ una función y $C, D \subseteq f(A)$. Pruebe que:

(a) $C \cup D = f(A) \implies f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = A$

(b) $C \cap D = \emptyset \implies f(f^{-1}(C)) \cap f(f^{-1}(D)) = \emptyset$

(c) Un conjunto $C \subseteq A$ se dice *estable para* f si

$$f^{-1}(f(C)) = C.$$

(c.i) Demuestre que si C y D son estables para f, entonces $C \cup D$ también lo es.

(c.ii) **(Prop)** Demuestre que para todo $C \subseteq A$, el conjunto $D = f^{-1}(f(C))$ es estable para f.

P3.- Sea A un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{F} = \{f : A \to A \mid f \text{ es una función}\}$, es decir, $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las funciones de A en A. Sea $g : A \to A$ una función biyectiva. Se define la función $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ por

$$\varphi(f) = g \circ f.$$

(a) Sea $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ definido por:

$$\mathcal{H} = \{f : A \to A \mid f \text{ es una función biyectiva}\}.$$

(i) Demuestre que, para todo $h \in \mathcal{H}$, existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $g \circ f = h$.

(ii) **(Prop.)** A partir de (i), concluya la siguiente igualdad de conjuntos: $\varphi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

(b) Demuestre que φ es biyectiva y calcule su inversa.

We have a hulk

Recordatorio: Imagen y Preimagen

(1) Conjunto Imagen:
Definición 1. Dada $f : A \to B$ función y $C \subseteq A$, definimos su conjunto imagen como

$$f(C) = \{f(x) \in B \mid x \in C\}$$

o equivalentemente como

$$f(C) = \{y \in B \mid \exists x \in C,\ y = f(x)\}$$

Propiedades:

1. $f(A) \subseteq B$, $f(\varnothing) = \varnothing$
2. Caracterización de epiyectividad:
$$f : A \to B \text{ es epiyectiva} \iff f(A) = B$$
3. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
4. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
5. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) Conjunto Preimagen:
Definición 2. Dada $f : A \to B$ y $D \subseteq B$, definimos su conjunto preimagen como

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

Propiedades:

1. $f^{-1}(B) = A, \quad f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
2. $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
3. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
4. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Mezclando imagen y preimagen:

1. $f^{-1}(f(A)) = A$
2. $A' \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$
3. $B' \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$
4. f es inyectiva $\Leftrightarrow \forall A' \subseteq A,\ f^{-1}(f(A')) = A'$
5. f es epiyectiva $\Leftrightarrow \forall B' \subseteq B,\ f(f^{-1}(B')) = B'$