

P2 (b) Sea E un conjunto de referencia y $A, B \subseteq E$. Pruebe que:

$$B \setminus A = E \iff B = E \wedge A = \emptyset.$$

Vamos a proceder por doble implicancia

(TIP: Siempre hay una implicancia que es más fácil!! Partan por esa)

$$B = E \wedge A = \emptyset \rightarrow B \setminus A = E$$

simplemente "reemplazamos".

$$\begin{aligned} E \setminus \emptyset & \quad \text{/por hipótesis} & E \setminus \emptyset = E \\ = E \cap \emptyset^c & \quad \text{/def de } \setminus \\ = E \cap E & \quad \text{/def } \emptyset \text{ y de } c \\ = E & \quad \text{/def } \cap \end{aligned}$$

luego, se tiene $B = E \wedge A = \emptyset \Rightarrow B \setminus A = E$

Veamos la implicancia "hacia el otro lado"

$$B \setminus A = E \Rightarrow B = E \wedge A = \emptyset$$

Tenemos que ver que $B \setminus A = E$ implique $B = E$ y que implique $A = \emptyset$

Veamos el primero, $B \setminus A = E \Rightarrow B = E$ ¿Qué significa $B = E$? $\rightarrow B \subseteq E, B \supseteq E$

Tenemos que $B \subseteq E$, nos falta ver que $B \supseteq E$

Sea x arbitrario, $x \in E \iff x \in B \setminus A$

$$\iff x \in (B \cap A^c) \quad \text{¡¡¡¡! } B \cap A^c = B$$



$$\Rightarrow x \in B$$

luego, como x es arbitrario, $B = E$

Finalmente, vemos que $B \setminus A = E \Rightarrow B = E \wedge \emptyset = \emptyset$

Tenemos que $B = E$, luego, $B \setminus A = E \iff E \setminus A = E$ / hipótesis
 $\Rightarrow \emptyset = A$

$$\begin{aligned} E \setminus A &= E & \text{/def } \setminus \\ E \cap A^c &= E & \text{/def } \setminus \\ E \cap A^c &= E \cap A & \text{/def } \cap \\ E \cap \emptyset &= A & \text{/def } \cap \\ \emptyset &= A & \end{aligned}$$

Así, se tiene la implicancia hacia el otro lado

luego, por doble implicancia, se tiene que $B \setminus A = E \Leftrightarrow B = E \wedge A = \emptyset$

(c) Determine si lo siguiente es verdadero para todos los conjuntos $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ (donde los complementos se toman con respecto a $\mathbb{N}$):

$$A \cup C^c = (C \setminus (A \cup B))^c.$$

Justifique su respuesta.

Veamos que no se cumple para algún conjunto. Si tomamos $A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{1, 2, 3\}$

$$A \cup C^c = \emptyset \cup \{\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}\} = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$$

les puse colores para que no se marcaron con los "1" saja

$$(C \setminus (A \cup B))^c = [\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\} \setminus (\emptyset \cup \{1\})]^c$$

$$= [\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\} \setminus \{1\}]^c$$

$$= [\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}]^c$$

P4 Sean $A \subseteq E$ y $B \subseteq E$ dos conjuntos. Demuestre que

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \wedge Y \subseteq B\}.$$

Vamos a verlo por doble inclusión

$$\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \wedge Y \subseteq B\}$$

Si tomamos Z arbitrario $\in \{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \wedge Y \subseteq B\}$

tenemos $Z = X' \cup Y'$, con $X' \subseteq A$ y $Y' \subseteq B$, luego, $Z = X' \cup Y' \subseteq A \cup B$

$$\begin{aligned} X' &\subseteq A & Y' &\subseteq B \\ A &\subseteq A \cup B & B &\subseteq A \cup B \\ X' \cup Y' &\subseteq A \cup B \end{aligned}$$

Así, al aplicar definición del conjunto potencia, $X' \cup Y' \subseteq A \cup B$

$$X' \cup Y' \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$Z \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

$\therefore$ Se tiene la primera inclusión, sigamos (1)

$$\text{PDQ: } \mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \wedge Y \subseteq B\}$$

Sea Z arbitrario, tomamos, $Z \in \mathcal{P}(A \cup B)$

$$\Leftrightarrow Z \subseteq A \cup B$$

Veamos que en efecto existan $X \subseteq A \wedge Y \subseteq B$ tq $Z = X \cup Y$

Consideremos $X' = Z \cap A \subseteq A$ y $Y' = Z \cap B \subseteq B$

Nos falta que: $Z = X' \cup Y'$

PDQ: $Z \subseteq X' \cup Y'$

Sea $x \in Z$, como $Z \subseteq A \cup B$, entonces $x \in A \vee x \in B$

$$x \in Z \wedge (x \in A \vee x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in Z \wedge x \in A) \vee (x \in Z \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in Z \cap A) \vee (x \in Z \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in (Z \cap A) \cup (Z \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in X' \cup Y'$$

$\therefore$ se concluye que $Z \subseteq X' \cup Y'$ (1)

PDQ: $Z \supseteq X' \cup Y'$

$$x \in X' \cup Y' \Leftrightarrow x \in X' \vee x \in Y'$$

$$\Leftrightarrow x \in Z \cap A \vee x \in Z \cap B \quad \text{siempre } \in Z!$$

$$\Leftrightarrow x \in Z$$



Así, concluimos que $Z = X' \cup Y'$ y por lo tanto, $Z \in \{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \wedge Y \subseteq B\}$

$\therefore$ se concluye segunda inclusión (2)

$\therefore$ se concluye la segunda inclusión (2)

Finalmente, se cumple que $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \wedge Y \subseteq B\}$