P1

P1.- Sea E un conjunto de referencia y sean $A, B \subseteq E$:

(a) Use que $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ para probar que $A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

(b) Pruebe que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(c) ¿Es cierto que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$? Justifique.

(d) Pruebe que $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \cup \{\emptyset\}$.

(e) Demuestra que
$$\{A \times B \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

(f) Demuestra que
$$\{A \times B \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

a) $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

$\iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \wedge \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)$

$\iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

¡por hint!

$\iff A = B$

$\therefore \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$

b) PDQ: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Sea $x \in \mathcal{P}(A \cap B)$

$\iff x \subseteq A \cap B$

$\iff x \subseteq A \wedge x \subseteq B$

$\iff x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B)$

$\iff x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$\therefore \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

c) En general, no

Consideramos los conjuntos $A = \{0\}$ y $B = \{1\}$

$\rightarrow A \cup B = \{0, 1\}$

$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}\}$

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$

d) PDQ: $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \cup \{\emptyset\}$

En efecto, sea $x \in \mathcal{P}(A \setminus B)$

$\rightarrow x \subseteq A \setminus B$

$\iff x \subseteq A \wedge x \subseteq B^c$

$\iff x \in \mathcal{P}(A) \wedge (x \notin B \vee x = \emptyset)$

$\iff x \in \mathcal{P}(A) \wedge (x \notin \mathcal{P}(B) \vee x \in \{\emptyset\})$

$\iff (x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee (x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \{\emptyset\})$

$\rightarrow (x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B)^c) \vee (x \in \{\emptyset\})$

$\Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \cup \{\emptyset\}$

e) Sea $C \times D \in \{A \times B \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$

$\Rightarrow C, D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow C, D \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow C \times D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\Rightarrow C \times D \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$\therefore \{A \times B \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

f) Por ejemplo, si vemos la P2/ b), $\forall x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), x \times y \neq C$,

Es decir $x \times y \notin \{A \times B \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$

Pero, $\forall x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \Rightarrow x \times y \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow x \times y \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y por lo tanto

se tiene lo buscado,

$$\{A \times B \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

(a) Sean A y B conjuntos. Pruebe que:

$$(a, b), (c, d) \in A \times B \Rightarrow (a, d) \in A \times B$$

(b) Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demuestre que no existen $A, B \in \mathbb{R}$ tales que $A \times B = C$

(c) Sean A,B,C conjuntos. Demuestre que: $(A \times B = A \times C) \wedge (A \neq \emptyset) \Rightarrow B = C$

a) $(a,b), (c,d) \in A \times B \Leftrightarrow (a,b) \in A \times B \wedge (c,d) \in A \times B \Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in B) \wedge (c \in A \wedge d \in B)$ / Def $\times$

$\Leftrightarrow (a \in A \wedge d \in B) \wedge (c \in A \wedge b \in B)$

$\Rightarrow a \in A \wedge d \in B$

$\Leftrightarrow (a, d) \in A \times B$ / Def $\times$

b) Razonemos por contradicción, existen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tq $A \times B = C$

¿Por qué lo vemos por contradicción? ¿Por qué funciona? Si se dan cuenta, los conjuntos que tomamos <u>están</u> SI O SI en C, porque son pares $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que cumplen con la condición de $x^2+y^2 \leq 1$ luego, al tomar 2 que cumplen vemos que si usamos la propiedad recién vista, hay otro par (1,1) que debería ser a su vez C, pero como no es así, se tiene que no se cumple que $A \times B = C$. Hay muchos otros que lo cumplen? Sí, pero encontramos que no es para todos (debería el conjunto tener alguna restricción para cumplirlo por ejemplo)

En particular podemos ver que: $(0,1), (1,0) \in C$

Pues $0^2 + 1^2 = 1^2 + 0^2 = 1 \leq 1$ y como $C = A \times B$ tenemos que: $(0,1), (1,0) \in A \times B$

y por (a), tenemos que $(1,1) \in A \times B = C$ pero $1^2 + 1^2 = 2 \nleq 1$

"Explicación porque vari@s se complicaron en porque "1caso particular me sirve"
↳ (Estoy partiendo desde que están en C!) SI O SI

Luego no existe $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tq $A \times B = C$

$(A \times B = A \times C) \wedge (A \neq \emptyset) \Rightarrow B = C$

c) Notemos que como $A \neq \emptyset$ por hipotesis, entonces existe al menos un $x_0 \in A$

Luego, sea $y \in B$ arbitrario, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
y \in B &\Leftrightarrow V \wedge y \in B && /\text{Identidad} \\
&\Leftrightarrow x_0 \in A \wedge y \in B && /\ x_0 \in A \\
&\Leftrightarrow (x_0, y) \in A \times B && /\ \text{Def } \times \\
&\Leftrightarrow (x_0, y) \in A \times C && /\ \text{Hipotesis} \\
&\Leftrightarrow x_0 \in A \wedge y \in C && /\ \text{Def } \times \\
&\Leftrightarrow V \wedge y \in C && /\ x_0 \in A \\
&\Leftrightarrow y \in C && /\text{Identidad}
\end{aligned}
$$

Así, como $y \in B$ era arbitrario, entonces lo anterior se cumple para todo $y \in B$, por lo que $B = C$

P3

(a) Indique cuál(es) de estos conjuntos son grafos de funciones:

1. $R = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b = a^p \text{ para algún } p \in \mathbb{N}\}$.
2. $R = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (y+1)^2\}$.

Algo es grafo si $\forall a \in \mathbb{N}, \exists! b \in \mathbb{N}$

1. Notemos que no es grafo ya que, por ejemplo $(2, 4) \in \mathbb{N}^2$ y $(2, 16) \in \mathbb{N}^2$
   $4 = 2^2$ $16 = 2^4$
   Es decir, para un a hay más de un b
2. Este si parece ser grafo: Hay que ver que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}$
   ojo! Están puestos y,x "al revés" para confundir

Supongamos por contradicción para $y \in \mathbb{R}$, $\exists \underbrace{x_1, x_2}_{x_1 \neq x_2} \in \mathbb{R}$ tq $(y, x_1) \in G \wedge (y, x_2) \in G$

$\Rightarrow x_1 = (y+1)^2 \neq x_2 = (y+1)^2 \Rightarrow (y+1)^2 \neq (y+1)^2$ $\divideontimes$

lo que claramente es una contradicción

luego, G es grafo

(b) Indique cuál(es) de los siguientes pares de funciones son iguales:

1. $f, g : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x+2}$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

2. $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

¡Ojo! $(0,\infty)$ ¿no toma al 0

1. Notemos que $f(-1) = \dfrac{(1-1)}{(1-2+2)} = \dfrac{0}{1} = 0$; $g(-1) = \dfrac{-1-1}{-1+2} = \dfrac{-2}{1} = -2$

Luego, $\exists x \in \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ tq $f(x) \neq g(x) \Rightarrow f \neq g$

2. Notemos $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$,

Luego $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ $\forall x > 0$,

Entonces, $\forall x \in \text{Dom}(f)$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} \cdot \cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}} = g(x)$ (esto es sólo válido porque $x > 0$) luego $f = g$