Auxiliar 8

Conjuntos III y Funciones

Profesor: José Soto
Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas

P1.- Sea E un conjunto de referencia y sean $A, B \subseteq E$:

(a) Use que $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ para probar que $A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

(b) Pruebe que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(c) ¿Es cierto que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$? Justifique.

(d) Pruebe que $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \cup \{\emptyset\}$.

(e) Demuestra que
$$\{A \times B \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

(f) **Propuesto** Demuestra que
$$\{A \times B \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

P2.-

(a) Sean A y B conjuntos. Pruebe que:
$$(a, b), (c, d) \in A \times B \Rightarrow (a, b) \in A \times B$$

(b) Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demuestre que no existen $A, B \in \mathbb{R}$ tales que $A \times B = C$

(c) Sean A,B,C conjuntos. Demuestre que: $(A \times B = A \times C) \wedge (A \neq \emptyset) \Rightarrow B = C$

P3.- Trabajemos ahora con funciones

(a) Indique cuál(es) de estos conjuntos son grafos de funciones:

1. $R = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid b = a^p \text{ para algún } p \in \mathbb{N}\}$.
2. $R = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (y+1)^2\}$.

(b) Indique cuál(es) de los siguientes pares de funciones son iguales:

1. $f, g : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x+2}$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.
2. $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

Propuestos.-

(a) Sea $A \subseteq E$. Pruebe que:

$$\mathcal{P}(A) = \{A \cap X \mid X \in \mathcal{P}(E)\}$$

(b) Sea E el conjunto universo, con al menos dos elementos diferentes, y sea $A \subseteq E$. Demuestre que:

$$[\forall B \in (\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}),\ A \subseteq B] \Rightarrow A = \emptyset.$$

(c) Demuestre que:

$$\{A \times B \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

y que dicha igualdad no siempre se cumple.

(d) Sean $A, A' \subseteq E$ y $B, B' \subseteq F$. Demuestre las siguientes proposiciones:

- $(A \cup A') \times B = (A \times B) \cup (A' \times B)$
- $(A \cap A') \times B = (A \times B) \cap (A' \times B)$

Uh, you're fired

Diferencia Simétrica:

- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- $A \Delta E = A^c$
- Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \Delta B = A \cup B$
- Neutro: $A \Delta \emptyset = A$
- Nilpotencia: $A \Delta A = \emptyset$
- Conmutatividad: $A \Delta B = B \Delta A$
- Asociatividad: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
- Distributividad: $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Producto cartesiano:

- $(a, b) \in A \times B \iff a \in A \wedge b \in B$
- $(a, b) = (x, y) \iff a = x \wedge b = y$
- $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$
- Si $A \subseteq A_0$ y $B \subseteq B_0$, entonces $A \times B \subseteq A_0 \times B_0$
- $(A \times B) \cap (A_0 \times B_0) = (A \cap A_0) \times (B \cap B_0)$
- $(A \times B) \cup (A_0 \times B_0) \subseteq (A \cup A_0) \times (B \cup B_0)$

Formas de distribución:

1. $(A \cup A_0) \times B = (A \times B) \cup (A_0 \times B)$
2. $A \times (B \cup B_0) = (A \times B) \cup (A \times B_0)$
3. $(A \cap A_0) \times B = (A \times B) \cap (A_0 \times B)$
4. $A \times (B \cap B_0) = (A \times B) \cap (A \times B_0)$

Conjunto Potencia:

- $\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq E \mid X \subseteq A\}$
- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
- $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Funciones:
Diremos que la 3-tupla (A, B, G) es una **función de A en B** si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $G \subseteq A \times B$

b) $\forall a \in A, \exists! b \in B$ tal que $(a, b) \in G$

Usamos la notación $f : A \to B$ para referirnos a una función de A en B. Por la condición 2, no hay ambigüedad al escribir $b = f(a)$, por lo tanto también se puede expresar como:

2'. $\forall a \in A, \exists! b \in B$ tal que $b = f(a)$

Igualdad de Funciones:
Si $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son funciones, entonces:

$$f = g \iff \left(\begin{array}{l} \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) \\ \wedge \\ \mathrm{Cod}(f) = \mathrm{Cod}(g) \\ \wedge \\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f),\ f(x) = g(x) \end{array} \right)$$

Sea $f : A \to B$ una función.