Auxiliar Extra

P1

(a) Sean p, q, r tres proposiciones lógicas. Considere la proposición lógica s dada por:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

Demuestre que $\neg s \iff (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \wedge \overline{r}$.

$$\overline{(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\overline{(p \Rightarrow q)} \vee [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]} \qquad \text{caract implic}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\overline{(p \Rightarrow q)}} \wedge \overline{[(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]} \qquad \text{ley morgan}$$

$$\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge \overline{[\overline{(q \Rightarrow r)} \vee (p \Rightarrow r)]} \qquad \text{doble neg, caract implic}$$

$$\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge [\overline{\overline{(q \Rightarrow r)}} \wedge \overline{(p \Rightarrow r)}] \qquad \text{ley de morgan}$$

$$\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge [(q \Rightarrow r) \wedge \overline{(\overline{p} \vee r)}] \qquad \text{doble neg, caract implic}$$

$$\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge [(q \Rightarrow r) \wedge (p \wedge \overline{r})] \qquad \text{ley de morgan, doble neg}$$

$$\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \wedge \overline{r} \quad \text{qed} \qquad \text{asoc.}$$

(b) Se define el operador lógico binario $\veebar$ (disyunción exclusiva) tal que:

$$p \veebar q \iff (p \vee q) \wedge \overline{(p \wedge q)}.$$

Sean ahora las proposiciones $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ tales que

$$[(p_1 \veebar p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_4)] \iff F. \qquad (*)$$

Con esto, determine el valor de verdad (sin utilizar tablas) de las siguientes proposiciones:

1) $(p_6 \Rightarrow p_5) \vee (p_1 \vee p_2)$
2) $[(p_5 \Rightarrow p_6) \vee \overline{p_1}] \Rightarrow (p_4 \vee p_3)$
3) $\overline{[(p_6 \vee p_5) \wedge (p_1 \wedge p_2)]} \iff (p_4 \Rightarrow p_3)$

1) SOL: DE (*) Y DEF. $\Rightarrow$: $\underbrace{(p_1 \veebar p_2) \iff V}_{\boxed{1}}$ Y $\underbrace{(p_3 \Rightarrow p_4) \iff F}_{\boxed{2}}$.

DE $\boxed{1}$, DEF. $\veebar$ Y DEF. $\wedge$: $(p_1 \vee p_2) \overset{(*_1)}{\iff} V$ Y $\overline{(p_1 \wedge p_2)} \overset{(*_2)}{\iff} V$.

DE $\boxed{2}$ Y DEF. $\Rightarrow$: $p_3 \underset{(*_3)}{\iff} V$ Y $p_4 \underset{(*_4)}{\iff} F$.

CON ESTO:

$$(p_6 \Rightarrow p_5) \vee (p_1 \vee p_2) \underset{(*_1)}{\iff} (p_6 \Rightarrow p_5) \vee V \underset{\text{DEF. } \vee}{\iff} V \blacksquare$$

2) SOL: $([(p_5 \Rightarrow p_6) \vee \overline{p_1}] \Rightarrow (p_4 \vee p_3))$

$$\underset{(*_3),(*_4)}{\iff} ([(p_5 \Rightarrow p_6) \vee \overline{p_1}] \Rightarrow (F \vee V))$$

$$\underset{\text{DEF. } \vee}{\iff} ([(p_5 \Rightarrow p_6) \vee \overline{p_1}] \Rightarrow V)$$

$$\underset{\text{DEF. } \Rightarrow}{\iff} V \blacksquare$$

3) SOL: $\{\overline{[(P_6 \vee P_5) \wedge (P_1 \wedge P_2)]} \Leftrightarrow (P_4 \Rightarrow P_3)\}$

$\underset{\text{MORGAN}}{\Leftrightarrow} \{[\overline{(P_6 \vee P_5)} \vee \overline{(P_1 \wedge P_2)}] \Leftrightarrow (P_4 \Rightarrow P_3)\}$

$\underset{(*_2)}{\Leftrightarrow} \{[\overline{(P_6 \vee P_5)} \vee V] \Leftrightarrow (F \Rightarrow V)\}$

$(*_3),(*_4)$

$\Leftrightarrow \{V \Leftrightarrow V\}$

DEF. $\vee$
DEF. $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow V$

P2

(a) Sean P, Q y S funciones proposicionales sobre un conjunto de referencia E. Suponga que la siguiente afirmación es **falsa**:

$$\exists x \in E,\ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow ((P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \overline{S(x)})$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $\forall x \in E,\ P(x)$
- $\exists x \in E,\ \neg Q(x)$
- $\exists x \in E,\ S(x)$

$\exists x \in E,\ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow ((P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \overline{S(x)})$

Caracterizamos los $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x \in E, \overline{(P(x) \vee Q(x))} \vee (\overline{P(x) \wedge Q(x)} \vee \overline{S(x)})$

Aplicamos Morgan y asociamos

$\Leftrightarrow \exists x \in E\ [\underbrace{(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}) \vee \overline{P(x)}}_{\text{absorción!}}] \vee \overline{Q(x)} \vee \overline{S(x)}$

$\Leftrightarrow \exists x \in E,\ \overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)} \vee \overline{S(x)}$

Tenemos que $\exists x \in E,\ (\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)} \vee \overline{S(x)}) \Leftrightarrow F$

$\forall x \in E,\ P(x) \wedge Q(x) \wedge S(x) \Leftrightarrow V$

Aplicamos distributividad del $\forall$ sobre el $\wedge$

$\Leftrightarrow \forall x \in E, P(x) \wedge \forall x \in E, Q(x) \wedge \forall x \in E, S(x) \Leftrightarrow V$

Como tenemos solo "$\wedge$"'s para que la afirmación sea V

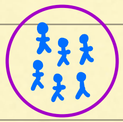
$\forall x \in E, P(x) \Leftrightarrow V$ ← valor del primer punto!

$\forall x \in E, Q(x) \Leftrightarrow V$ → nos piden $\overline{Q(x)}$, veamos la neg → $\forall x \in E, Q(x) \Leftrightarrow \exists x \in E, Q(x) \Leftrightarrow F$

tenemos el valor del segundo punto!

$\forall x \in E\ S(x) \Leftrightarrow V$ → como se cumple para todos, en particular, "para alguno se cumple" $\therefore \exists x \in E, S(x) \Leftrightarrow V$

Ej:



$\forall$ persona $\in$ ○, la persona es ⬟ $\Leftrightarrow V$
$\exists$ persona $\in$ ○, la persona es ⬟ $\Leftrightarrow V$

(b) 1) ¿Es cierto que $\forall y \in \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{Q}, (x^2 = y \vee x^2 = -y)$? Justifique su respuesta.

2) Demuestra que la siguiente proposición es falsa:

VALOR SOBRE m ← $\underbrace{\exists n \in \mathbb{N}, n \neq 0}_{\exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = m \cdot k$ ← PROPIEDAD SOBRE m

1) Sol: La negación es: $\exists y \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q}, (x^2 \neq y \wedge x^2 \neq -y)$

Notar que la negación es cierta, pues $y = 2 \in \mathbb{Q}$ y cumple que $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2 \wedge x^2 \neq -2$

(las raíces son $x = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{I}$) → irracionales, no racionales

$\therefore$ la prop. es F ■

2) La negación es: $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0}_{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, n \neq m \cdot k$

Veamos que es V.

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$ arbitrario. Tomando $m = 0 \in \mathbb{N}$ se cumple $\forall k \in \mathbb{N}$ que $m \cdot k = 0 \cdot k = 0$. Como $n \neq 0$, entonces $n \neq \underbrace{m \cdot k}_{0}$.

$\therefore$ la negación es V y con ello la proposición original es F ■

P3

(a) Considere la sucesión de los números de Fibonacci definida por:

$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 2$$

1. Demuestre que $\forall n \geq 2, (\frac{3}{2})^{n-2} \leq f_n \leq 2^{n-2}$

f_n está definido por una recurrencia, que depende de 2 términos. Es necesario usar induc. fuerte!

CB: $n = 2$ $\qquad$ $n = 3$ $\qquad$ necesarios 2 CB!

$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2} \leq f_2 = f_1 + f_0 = 1+0 = 1 \leq 2^{2-2} = 2^0 = 1$

$\frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3-2} \leq f_3 = f_2 + f_1 = f_1 + f_0 + f_1 = 1+0+1 = 2 \leq 2^{3-2} = 2$

Hip: Para algún $n \geq 4$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} \leq f_{n-1} \leq 2^{n-3}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-4} \leq f_{n-2} \leq 2^{n-4}$$

* Si escribimos nuestra hipotesis de otra forma:
Para algún $n \geq 2$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \leq f_n \leq 2^{n-2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq f_{n+1} \leq 2^{n-1}$$

PI: Dem para n

PDQ: $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \leq f_n \leq 2^{n-2}$

Veamos cada cota por partes:

Izq:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-4}\left[\frac{3}{2}+1\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-4}\frac{5}{2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-4}\cdot\frac{9}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

Der:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \leq 2^{n-3} + 2^{n-4} = 2^{n-4}(2+1) = 2^{n-4}\cdot 3 \leq 2^{n-4}\cdot 4 = 2^{n-4}\cdot 2^2 = 2^{n-2}$$

Luego, tenemos que $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \leq f_n \leq 2^{n-2}$

qed

(b) Sea $C \in R$ con $C = 1$. Considere la recurrencia dada por $a_0 = 0, a_1 = 1$ y $a_n = (C-1)a_{n-1} + Ca_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Demuestre por inducción que, para todo $n \geq 0$, se tiene que:

$$a_n = \frac{C^n - (-1)^n}{C+1}$$

CB: $n=0$

$$a_0 = 0 = \frac{C^0 - (-1)^0}{C+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

$n=1$

$$a_1 = 1 = \frac{C^1 - (-1)^1}{C+1} = \frac{C^1+1}{C+1} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

Hip: Para algún $n \geq 1$

$$a_n = \frac{C^n - (-1)^n}{C+1}$$

$$a_{n-1} = \frac{C^{n-1} - (-1)^{n-1}}{C+1}$$

PI: Para $n = n+1$

PDQ: $$a_{n+1} = \frac{C^{n+1} - (-1)^{n+1}}{C+1}$$

$$a_{n+1} = (C+1)a_n + Ca_{n-1} = (C-1)\left[\frac{C^n - (-1)^n}{C+1}\right] + C\left[\frac{C^{n-1} - (-1)^{n-1}}{C+1}\right] = \frac{C^n(C+1) - (-1)^n(C+1) + C(C^{n-1} - C(-1)^{n-1}}{C+1}$$

$$= \frac{C^nC - C^n - (-1)^nC + (-1)^n + CC^{n-1} - C(-1)^n(-1)^{-1}}{C+1}$$

$$= \frac{C^nC - C^n + CC^{n-1} - \cancel{(-1)^n}C + \cancel{(-1)^n}C + (-1)^n}{C+1}$$

$$= \frac{C^{n+1} - \cancel{C^n} + \cancel{C^n} + (-1)^n}{C+1} \qquad -(-1)^n = (-1)^n \cdot (-1) = (-1)^{n+1}$$

$$= \frac{C^{n+1} - (-1)^{n+1}}{C+1}$$ qed

(c) 1) Demuestre usando inducción que:

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2 \quad \forall n \geq 1$$

2) Demuestre por inducción que:

$$\underset{(1+x^{2^{1-1}})}{(1+x)}\underset{(1+x^{2^{2-1}})}{(1+x^2)}\underset{(1+x^{2^{3-1}})}{(1+x^{2^2})}\underset{(1+x^{2^{4-1}})}{(1+x^{2^3})}\dots(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1} \quad \forall n \geq 1, \quad x \neq 1$$

INDUCCIÓN:

$$\forall m \geq m_0, \ell(m) \iff \underbrace{\ell(m_0)}_{\substack{\text{CASO BASE} \\ \text{(C.B.)}}} \wedge \overbrace{(\forall m > m_0, \underbrace{\ell(m)}_{\substack{\text{HIPÓTESIS} \\ \text{DE INDUCCIÓN} \\ \text{(H.I.)}}} \Rightarrow \ell(m+1))}^{\text{PASO INDUCTIVO (P.I.)}}$$

1) C.B.: $m=1$

$\cdot\ (2m)! = (2\cdot 1)! = 2! = 1\cdot 2 = 2$

$\cdot\ 2^{2m}(m!)^2 = 2^{2\cdot 1}(1!)^2 = 2^2\cdot 1^2 = 4$

CLARAMENTE $2<4$ $\therefore$ SE CUMPLE $\ell(1)$.

P.I. SEA $m>1$ ARBITRARIO TQ $\ell(m)$ $\left(\overset{H.I.}{\iff} (2m)! < 2^{2m}(m!)^2\right)$

DEM QUE $\ell(m+1)$ $\left(\iff (2(m+1))! < \underbrace{2^{2(m+1)}((m+1)!)^2}\right)$

$= 2^{2m+2}\cdot((m+1)\cdot m!)^2$

$= 2^{2m}\cdot 2^2\cdot (m+1)^2\cdot (m!)^2$

EN EFECTO:

$$\begin{aligned}
(2(m+1))! &= (2m+2)! \\
&= (2m+2)(2m+1)(2m)! \\
&\underset{H.I.}{<} (2m+2)(2m+1)\,2^{2m}(m!)^2 \\
&\underset{1<2}{<} (2m+2)(2m+2)\,2^{2m}(m!)^2 \\
&= 2(m+1)\,2(m+1)\,2^{2m}(m!)^2 \\
&= 2^2(m+1)^2\,2^{2m}(m!)^2 \\
&= 2^{2m+2}((m+1)\cdot m!)^2 \\
&= 2^{2(m+1)}((m+1)!)^2 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

2) C.B.: $m=1$ ($x\neq 1$)

$\cdot\ (1+x^{2^{1-1}}) = (1+x^{2^0}) = (1+x^1) = 1+x$

$\cdot\ \dfrac{x^{2^1}-1}{x-1} = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 1+x$ ✓

$\therefore$ $\ell(1)$ CUMPLE ✓

P.I.: SEA $m>1$ ARBITRARIO TQ $\ell(m)$ $\left(\overset{H.I.}{\iff} (1+x^{2^{1-1}})(1+x^{2^{2-1}})(1+x^{2^{3-1}})(1+x^{2^{4-1}})\dots(1+x^{2^{m-1}}) = \dfrac{x^{2^m}-1}{x-1}\right)$

VEAMOS QUE $\ell(m+1)$ $\left(\iff (1+x^{2^{1-1}})(1+x^{2^{2-1}})(1+x^{2^{3-1}})(1+x^{2^{4-1}})\dots(1+x^{2^{m-1}})(1+x^{2^{(m+1)-1}}) = \dfrac{x^{2^{m+1}}-1}{x-1}\right)$

EN EFECTO:

$$\begin{aligned}
&(1+x^{2^{1-1}})(1+x^{2^{2-1}})(1+x^{2^{3-1}})(1+x^{2^{4-1}})\dots(1+x^{2^{m-1}})(1+x^{2^{(m+1)-1}}) \\
&\underset{H.I.}{=} \frac{x^{2^m}-1}{x-1}\cdot(1+x^{2^m}) \\
&= \frac{(x^{2^m})^2-1}{x-1} \\
&= \frac{x^{2^m}\cdot x^{2^m}-1}{x-1} \\
&= \frac{x^{2^m+2^m}-1}{x-1} \\
&= \frac{x^{2^m(1+1)}-1}{x-1} \\
&= \frac{x^{2^m\cdot 2}-1}{x-1} \\
&= \frac{x^{2^{m+1}}-1}{x-1} \ \blacksquare
\end{aligned}$$