Auxiliar 4

Inducción

Profesor: José Soto
Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas

P1.- Muestre por inducción las siguientes proposiciones:

(a) $\forall n \geq 1$, el 3 divide a $4^n - 1$.

(b) $\forall n \geq 0, 3^{2n+5} + 2^{4n+1}$ es divisible por 7.

(c) $\forall n \geq 0, 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13.

P2.- Demuestre que para todo natural n ≥ 1 se tiene que:

(a)
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$$

(b) Pruebe que $\forall n \geq 1$, se satisface que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

P3.- Sean $p_1, p_2, ..., p_n, q$ proposiciones. Pruebe por inducción que para todo n $\in \mathbb{N}$, n ≥ 2, la siguiente proposición es una tautología:

$$[p_n \Rightarrow (p_{n-1} \Rightarrow (p_{n-2} \Rightarrow (\ldots (p_1 \Rightarrow q))))] \Leftrightarrow [(p_n \wedge p_{n-1} \wedge \ldots \wedge p_1) \Rightarrow q]$$

P4.-

(a) Pruebe que todo número natural $n \geq 8$ puede escribirse como

$$n = 3p + 5q$$

donde $p, q \in \mathbb{N}$

(b) Considere la secuencia de $x_0, x_1 ...$ que satisface lo siguiente:

$$\forall n \geq 0, \quad x_{n+3} = -x_n + a$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es dado. Pruebe por inducción que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{6n} = x_0$.

Propuestos.- Demuestre utilizando inducción:

(a) Pruebe que $\forall n \geq 1$, el 9 divide a $4^n + 15n - 1$

(b) Muestre que para todo n≥1 se tiene:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})...(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n} - 1}{x - 1}$$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, la suma de los ángulos interiores de un polígono con n lados, n≥3, es de 180(n-2) grados o, equivalentemente $\pi(n-2)$ radianes

(d) Sean $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$ y sea $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (n-1)(a_1 - a_0) + a_1$$

Its good to be back