

Quantificadores

Permite simplificar cuando queremos hablar de un "todo", ver que todas las proposiciones p_i (en un conjunto de ref.) sean V

• Función proposicional / Predicado: $P(x, y, z, \dots)$ expresión que depende de 0 o más variables, que cuando se reemplazan por elementos de un conjunto de ref. E , hacen que P se transforme en proposición
 $[p_1, p_2, \dots, p_n]$

→ Cuantificador Universal: $\forall; (\forall x \in E, P(x))$, "para todo x en E $P(x)$ "

* Contraejemplo: Un elemento $e \in E$ tq $P(e)$ es falsa, es el contraejemplo de $(\forall x \in E, P(x))$
 $[p_1, p_2, \dots, p_n]$

→ Cuantificador Existencial: $\exists; (\exists x \in E, P(x))$, "existe un x en E tq $P(x)$ "
 $[p_1, p_2, \dots, p_n]$

→ Cuantificador Existencia y unicidad: $\exists!; (\exists! x \in E, P(x))$, "existe sólo un x en E tq $P(x)$ "

$$\Leftrightarrow (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, \forall x' \in E, P(x) \wedge P(x') \Rightarrow x = x')$$

• Negación de cuantificadores

$$\hookrightarrow \neg (\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \overline{P(x)})$$

$$\hookrightarrow \neg (\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \overline{P(x)})$$

• Proposiciones:

$$\rightarrow P(e) \wedge (\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow P(e)$$

$$\rightarrow (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, Q(x))$$

$$\rightarrow (\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$$

$$\rightarrow (\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))$$

$$\rightarrow (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, P(x) \vee Q(x))$$

$$\rightarrow (\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))$$

$$\rightarrow (\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in E, \exists x \in E, P(x, y))$$

OJO!

$$\hookrightarrow \forall x \in E, P \Leftrightarrow P \quad \text{ya q } P \text{ no depende de } x$$

$$\hookrightarrow p \vee (\forall x \in E, Q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, Q(x) \vee p$$

$$\hookrightarrow p \wedge (\exists x \in E, Q(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, Q(x) \wedge p$$

TIPS:

Para dem $\forall x \in E, P(x)$ es verdadero

→ Tomar un x arbitrario

Para dem $\forall x \in E, P(x)$ es falso

→ Dar un contraejemplo

Para dem $\exists x \in E, P(x)$ es verdadero

→ Mostrar un caso que se cumpla

Auxiliar 3: Cuantificadores

(a) Determine la negación de las siguientes proposiciones.

1) $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 3 \vee n! = 2n.$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{m}{n} \neq 1.$

3) $\exists! x \in E, P(x)$

4) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b, c \in \mathbb{N}, n \geq 3 \wedge a, b, c \geq 1 \Rightarrow a^n + b^n \neq c^n.$

1) $\neg (\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 3 \vee n! = 2n)$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \neg (n \leq 3 \vee n! = 2n)$ negación cuantificadores

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \overline{(n \leq 3)} \wedge \overline{(n! = 2n)}$ por ley de Morgan

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n > 3 \wedge n! \neq 2n$ definición negación

2) $\neg (\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists m \in \mathbb{N}, \frac{m}{n} \neq 1)$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall m \in \mathbb{N}, \overline{(\frac{m}{n} \neq 1)}$ negación $\exists, \forall$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall m \in \mathbb{N}, \frac{m}{n} = 1$ definición neg

3) $\neg (\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b, c \in \mathbb{N}, n \geq 3 \wedge a, b, c \geq 1 \Rightarrow a^n + b^n \neq c^n)$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c \in \mathbb{N}, \neg (n \geq 3 \wedge a, b, c \geq 1 \Rightarrow a^n + b^n \neq c^n)$ negación $\forall$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c \in \mathbb{N}, \neg (\overline{(n \geq 3 \wedge a, b, c \geq 1)} \vee a^n + b^n \neq c^n)$ caracterización implicancia

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c \in \mathbb{N}, \neg (\overline{(n \geq 3)} \vee \overline{(a, b, c \geq 1)}) \vee a^n + b^n \neq c^n)$ ley de Morgan

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c \in \mathbb{N}, \neg (n < 3 \vee a, b, c < 1 \vee a^n + b^n \neq c^n)$ def neg

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c \in \mathbb{N}, \overline{(n < 3)} \wedge \overline{(a, b, c < 1)} \wedge \overline{(a^n + b^n \neq c^n)}$ ley de Morgan

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c \in \mathbb{N}, n \geq 3 \wedge a, b, c \geq 1 \wedge a^n + b^n = c^n$ def neg

4) $\neg (\exists! x \in E, P(x))$

$\neg [(\exists x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, \forall x' \in E, P(x) \wedge P(x') \Rightarrow x = x')]$ def $\exists!$

$$\overline{[(\exists x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, \forall x' \in E, P(x) \wedge P(x') \Rightarrow x = x')]}$$

def neg

$$\overline{[(\exists x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, \forall x' \in E, P(x) \wedge P(x') \Rightarrow x = x')]}$$

ley de Morgan

$$[(\forall x \in E, \overline{P(x)}) \wedge (\forall x \in E, \forall x' \in E, \neg(P(x) \wedge P(x') \Rightarrow x = x'))]$$

neg cuantificadores

$$[(\forall x \in E, \overline{P(x)}) \wedge (\forall x \in E, \forall x' \in E, \neg(\overline{P(x) \wedge P(x')} \vee x = x'))]$$

caract. implicancia

$$[(\forall x \in E, \overline{P(x)}) \wedge (\forall x \in E, \forall x' \in E, \overline{(\overline{P(x)} \vee \overline{P(x')} \vee x = x')})]$$

ley de Morgan, asoc.

$$[(\forall x \in E, \overline{P(x)}) \wedge (\forall x \in E, \forall x' \in E, (P(x) \wedge P(x') \wedge x \neq x'))]$$

ley de Morgan, doble negación

(b) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- 1) Determine el valor de verdad de las proposiciones a.1 y a.2
- 2) Considere el conjunto $\Omega = \{-1, 0, 1\}$.
 - i. $(\forall x \in \Omega), (\forall y \in \Omega), x + y \leq 1$
 - ii. $(\forall x \in \Omega), (\exists y \in \Omega), x^2 \leq y$
- 3) $\exists! x \in \mathbb{Z}, x^3 - 3x - 2 = 0$
- 4) $\exists! x \in \mathbb{Z}, x^2 = 4$

a.1 $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 3 \vee n! = 2n$

Basta con encontrar un $n \in \mathbb{N}$ que sirva como contraejemplo; probemos con $n=4$, luego

$$n! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 2 = 24 \neq 2n = 2 \cdot 4 = 8 \quad \wedge \quad n > 4$$

luego, el val de la proposición es F, porque encontramos al menos 1 $n \in \mathbb{N}$ que no lo cumple qual

a.2 $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists m \in \mathbb{N}, m/n \neq 1$

Sea un n arbitrario, si tomamos $m=n+1$; entonces $m/n = (n+1)/n = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$ ya que $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. luego, la proposición es V qual

2) Tenemos que $\mathbb{Z}$ corresponde al conjunto compuesto por $-1, 0, +1$, luego, si vemos las combinaciones $-1+0=-1$; $-1+1=0$; $0+1=1$; ninguna es mayor que 1; pero, el enunciado nunca nos dice que $x \neq y$, así podemos tener $x=y=1$, y en ese caso tenemos $x+y=1+1=2 > 1 \therefore$ la proposición es F, o sea, $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x+y > 1$; con $x=y=1$ qual

Esta proposición nos dice que para todo x , sea $-1, 0, 1$ al menos un φ entre $-1, 0, 1$ va a cumplir que $x^2 \leq \varphi$

Veamos, para -1 , $(-1)^2 = 1$, si $\varphi = 1$; x^2 en efecto es menor o igual a φ . Luego, para 0 , $0^2 = 0$, si $\varphi = 0$; en efecto $x^2 \leq \varphi$; y por último, para 1 , $1^2 = 1$, si $\varphi = 1$; x^2 en efecto es menor o igual a φ . Así, se cumple para todos los x

$\therefore$ Esta proposición es $\forall_{\text{verd}}$

3) OJO! Tenemos un cuantificador de existencia y unicidad, así, esta proposición sería falsa si es que no hay ningún x que lo cumpla o si es que hay más de uno que lo cumple. Luego, tenemos que $-1, 2$ resuelven la ecuación; $(-1)^2 - (3-1) - 2 = 0$; $2^2 - 3 \cdot 2 - 2 = 0$

Luego, como $-1 \neq 2$ lo cumplen, tenemos existencia, pero no unicidad, $\therefore$ la proposición es $\exists_{\text{fals}}$

4) Volvemos a hacer el mismo análisis ya que de nuevo tenemos un cuantificador de existencia y unicidad en este caso tenemos $x^2 = 4$, o sea, $x = \pm 2$. Luego, vuelve a "fallar" la unicidad. La proposición es $\exists_{\text{fals}}$

P2 Para x e y números enteros, sea $P(x, y)$ la función proposicional

$$(x \leq y) \Rightarrow (x^2 \leq y^2).$$

(a) Determine los números enteros que hacen que $P(x, 1)$ sea V

Tenemos $(x \leq 1) \Rightarrow (x^2 \leq 1^2)$ y nos piden determinar el conjunto en el cual $\{x \in \mathbb{Z} \mid P(x, 1) \text{ es V}\}$

que es lo mismo que decir que $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x \leq 1) \Rightarrow (x^2 \leq 1^2) \text{ es V}\}$. Así, para que una implicancia sea V

tenemos 3 casos, puede ser $\overset{1}{V} \Rightarrow \overset{2}{V}$; $\overset{2}{F} \Rightarrow \overset{3}{V}$; $\overset{3}{F} \Rightarrow \overset{3}{F}$, veamos cada caso por separado

1 Para que $(x \leq 1) \Rightarrow V$; como $x \in \mathbb{Z}$ son el conjunto de números $(-\infty, 1]$ y para, que la conclusión sea a su vez V, $(x^2 \leq 1) \Rightarrow V$; tenemos que esto solo lo cumplen los $n^\circ -1, 0, 1$

$$\begin{pmatrix} (-1)^2 = 1^2 \leq 1 \\ 0^2 = 0 \leq 1 \\ (-2)^2 = 4 > 1 \end{pmatrix}$$

2, 3 Para que $(x \leq 1) \Rightarrow F$; como $x \in \mathbb{Z}$ son el conjunto de números $[2, \infty^+)$ "no sirve" tanto $F \Rightarrow F$ como $F \Rightarrow V$ (no pensemos en la conclusión ya que

Luego, los números para los que la prop $P(x, 1)$ es V, son $-1, 0, 1, \dots$ (o tb escrito como $[-1, \infty^+)$)

(b) Determine el valor de verdad de $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, P(x, y)$.

Basta tomar un contraejemplo. Pongamos $x = -2 \wedge y = 1$, se tiene que $-2 \leq 1$; $(-2)^2 = 4 > 1$; $[(x \leq y) \Rightarrow (x^2 \leq y^2)] \Leftrightarrow F$

Se concluye así que el valor de la proposición es F ~~que~~

P3

Muestre que las siguientes proposiciones son verdaderas cualquiera sea la función proposicional p .

$$(a) (\forall x \in E)(\exists y \in E)(p(x) \Rightarrow p(y))$$

Sea x arbitrario, entonces tomando un valor de y a conveniencia, ^(sin quitar arbitrariedad del x !) $x = y$, tenemos que $p(x) \Rightarrow p(x)$.

Como a ambos lados de la implicancia tenemos la misma proposición, su valor es el mismo, por lo tanto la implicancia es verdadera por def de implicancia <sup>$(V \Rightarrow V) \Leftrightarrow V$
 $(F \Rightarrow F) \Leftrightarrow V$</sup> . Así, la proposición pedida es V

$$(b) (\exists y \in E)(\forall x \in E)(p(x) \Rightarrow p(y))$$

A veces es difícil ver las demostraciones con todas las proposiciones, cuando uno se encuentra "atascado" puede ser útil analizar la negación de la proposición pedida. Así

$$\neg(\exists y, \forall x, p(x) \Rightarrow p(y)) \Leftrightarrow \forall y, \exists x, (\overline{p(x) \Rightarrow p(y)}) \Leftrightarrow \forall y, \exists x, p(x) \wedge \overline{p(y)}$$

Analicemos la proposición, esta nos dice que para todo y existe un x tal que $p(x) \wedge \overline{p(y)}$

o sea, 1) $\overline{p(y)} \Leftrightarrow V$, esto es lo mismo que decir $p(y) \Leftrightarrow F$ ^(por def de negación) ¿Qué pasa si $x = y$? $p(x)$ no puede ser V y F al mismo tiempo ~~que~~

2) $p(x) \Leftrightarrow V$

$\therefore$ La negación de la proposición original es F y así la proposición pedida es V ~~que~~

P4

Sea Q un conjunto de personas que se encuentran esperando en la fila para entrar a ver a la U en Libertadores. Para $x, y \in Q$ se define la función proposicional:

$\varphi(x, y)$: La persona x está más adelante que la persona y en la fila.

Sea $p \in Q$ una persona en la fila. Encuentre y justifique las posiciones posibles de dicha persona en la fila para que satisfaga cada una de las siguientes proposiciones cuantificadas:

- (a) $\forall x \in Q, \varphi(p, x) \vee x = p$
- (b) $\forall x \in Q, \varphi(x, p) \vee x = p$
- (c) $\exists! x \in Q, \varphi(x, p) \vee \varphi(p, x)$

a) Veamos en palabras que nos dice, "Para todo x perteneciente a la fila de la U, la persona p está más adelante que la persona x en la fila o x es igual a p "

O sea p debe ser la persona que está primero en la fila

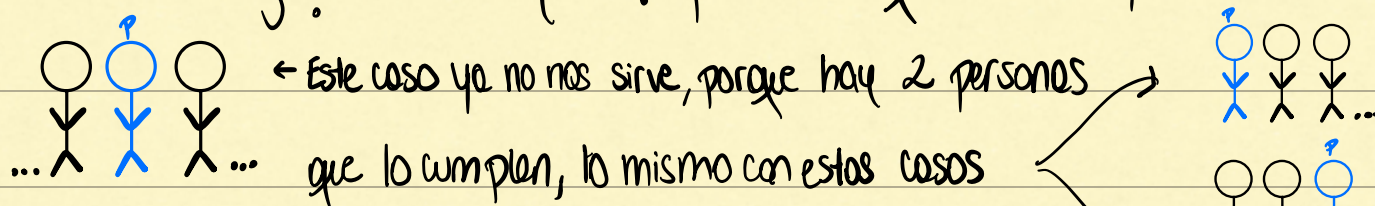


De esta forma, si se elige a cualquier persona en la fila, p va a estar siempre más adelante o simplemente es p

b) Nuevamente, veamos en palabras que nos están diciendo, "Para todo x perteneciente a la fila de la U, la persona x está más adelante que la persona p en la fila o x es igual a p "

De esta forma, la única manera de que esta proposición sea V es cuando p se encuentra al final de la fila.

c) En este caso, nos dice "Existe un ^(una única persona) único x perteneciente a la fila de la U tal que la persona x está más adelante que la persona p en la fila o la persona p está más adelante que la persona x en la fila". Ojo! solo hay 1! persona que lo cumple



Wego, el único caso posible es cuando solo hay 2 personas en la fila, sin importar la posición de p (x x / x x)

Cualquier duda escríbeme al correo! Ammo y buena semana mehora! :)