

Auxiliar 3

Cuantificadores

Profesor: José Soto

Auxiliares: Javier Santidrián Salas, Fernanda Young Arenas



Resumen

Negación de Cuantificadores

1. $\neg(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg P(x))$
2. $\neg(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg P(x))$

Reglas de Independencia

1. $(\forall x \in E, P) \Leftrightarrow P$
2. $P \vee (\forall x \in E, Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, P \vee Q(x))$
3. $P \wedge (\forall x \in E, Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, P \wedge Q(x))$
(tb se cumple para $\exists$)

Reglas de Intercambio

1. $(\forall x \in E)(\forall y \in E)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y \in E)(\forall x \in E)P(x, y)$
2. $(\exists x \in E)(\exists y \in E)P(x, y) \Leftrightarrow (\exists y \in E)(\exists x \in E)P(x, y)$

$$3. (\exists x \in E)(\forall y \in E)P(x, y) \Rightarrow (\forall y \in E)(\exists x \in E)P(x, y)$$

Proposición 1 *Modus Ponens Universal:*
 $(P(e) \wedge (\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow Q(e)$

Proposición 2 *Distributividad del $\forall$ sobre el $\wedge$*

Proposición 3 *Distributividad del $\exists$ sobre el $\vee$*

Proposición 4 *Factorización del $\forall$ sobre el $\vee$:*
 $(\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, P(x) \vee Q(x))$

Proposición 5 *Expansión del $\exists$ sobre el $\wedge$:*
 $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))$

P1.-

(a) Determine la negación de las siguientes proposiciones.

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 3 \vee n! = 2n.$
- 2) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{m}{n} \neq 1.$
- 3) $\exists! x \in E, P(x)$

$$4) \forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b, c \in \mathbb{N}, n \geq 3 \wedge a, b, c \geq 1 \Rightarrow a^n + b^n \neq c^n.$$

(b) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1) Determine el valor de verdad de las proposiciones a.1 y a.2

2) Considere el conjunto $\Omega = \{-1, 0, 1\}$.

i. $(\forall x \in \Omega), (\forall y \in \Omega), x + y \leq 1$

ii. $(\forall x \in \Omega), (\exists y \in \Omega), x^2 \leq y$

3) $\exists! x \in \mathbb{Z}, x^3 - 3x - 2 = 0$

4) $\exists! x \in \mathbb{Z}, x^2 = 4$

P2.- Para x e y números enteros, sea $P(x, y)$ la función proposicional

$$(x \leq y) \Rightarrow (x^2 \leq y^2).$$

(a) Determine los números enteros que hacen que $P(x, 1)$ sea V

(b) Determine el valor de verdad de $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, P(x, y)$.

P3.- Muestre que las siguientes proposiciones son verdaderas cualquiera sea la función proposicional p .

(a) $(\forall x \in E)(\exists y \in E)(p(x) \Rightarrow p(y))$

(b) $(\exists y \in E)(\forall x \in E)(p(x) \Rightarrow p(y))$

P4.- Sea Q un conjunto de personas que se encuentran esperando en la fila para entrar a ver a la U en Libertadores. Para $x, y \in Q$ se define la función proposicional:

$\varphi(x, y)$: La persona x está más adelante que la persona y en la fila.

Sea $p \in Q$ una persona en la fila. Encuentre y justifique las posiciones posibles de dicha persona en la fila para que satisfaga cada una de las siguientes proposiciones cuantificadas:

(a) $\forall x \in Q, \varphi(p, x) \vee x = p$

(b) $\forall x \in Q, \varphi(x, p) \vee x = p$

(c) $\exists! x \in Q, \varphi(x, p) \vee \varphi(p, x)$

Propuestos.- Sea p una proposición lógica y $q(x)$ una función proposicional.

(a) Demuestre que la proposición $(\exists y \in E)[q(y) \Rightarrow (\forall x \in E)q(x)]$ es tautología para cualquier función proposicional q .

(b) Si llamamos r a la proposición $(\forall x \in E)(p \Rightarrow q(x))$, determine el valor de verdad de p , sabiendo que r es falsa. Justifique.

(c) Si llamamos s a la proposición $(\exists x \in E)(p \Rightarrow q(x))$, decida si es posible determinar el valor de verdad de p , sabiendo que s es verdadera. Si su respuesta es afirmativa, indique su valor de verdad. Justifique.

Im Iron man