Auxiliar Extra

Inducción, sumatorias, funciones, cardinalidad, estructuras algebraicas, complejos, polinomios

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 12 de julio de 2025

P1. [No todo es lo que parece]

Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}$, y para $a \neq 1$ demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}$.

También calcule la suma $1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}+\dfrac{7}{8}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$.

P2. [Funciones]

Sea $f\colon A \to A$ una función tal que $f\circ f\circ f\circ f = \mathrm{Id}_A$. Demuestre que f es biyectiva y encuentre su inversa.

P3. [Estructuras algebraicas]

Sea (W,Δ) un grupo finito de cardinalidad par, con neutro e. Demuestre que existe $a \in W, a \neq e$ tal que $a^{-1} = a$.

P4. [Raíces de complejos]

Determine todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $1+z+z^2+\cdots+z^n = \dfrac{1+z^n}{2}$.

P5. [Raíces de polinomios]

El polinomio $P(z) = 2z^3-(5+6i)z^2+9iz-3i+1$ admite una raíz real a. Determine todas las raíces de $P(z)$.

P6. [Detective con polinomios]

Sean $u,v,w \in \mathbb{C}$. Considere el sistema de ecuaciones dado por $\begin{cases} u+v+w=4 \\ uvw=4 \\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{2} \end{cases}$.

Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio dado por $P(x)=(x-u)(x-v)(x-w)$, donde u,v,w son las soluciones del sistema.

a) Pruebe que $P(x) = x^3-4x^2+6x-4$.

b) Factorice el polinomio en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

P7. [Mezcla]

a) Sea $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ y $v \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera. Considere $R_v := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ es la raíz enésima de } v\}$ y $U := \{w \in \mathbb{C} \mid w \text{ es la raíz enésima de } 1\}$. Para $\hat{z} \in R_v$, la ley $*$ por $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1\cdot z_2}{\hat{z}}$ $(\forall\, z_1,z_2 \in R_v)$.

i) Demuestre que $*$ es ley de composición interna en R_v. **ii)** Pruebe que $\phi\colon (R_v,*) \to (U,\cdot)$ tal que $\phi(z) = \dfrac{z}{\hat{z}}$ es un isomorfismo. **iii)** Pruebe que $(R_v,*)$ es grupo abeliano.

b) Se define $A[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$ por $A[x] := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(3)=0\}$.

i) Demuestre que $(A[x],+,\cdot)$ es un anillo, donde $+,\cdot$ son la suma y producto habituales de polinomios.

ii) ¿Es $(A[x],+,\cdot,)$ un anillo conmutativo? ¿Es $(A[x],+,\cdot)$ un anillo unitario? ¿Tiene $(A[x],+,\cdot)$ divisores de cero? **iii)** Demuestre que $p(x) \in (A[x],+,\cdot,) \iff (\exists\, q(x)) : (\mathbb{R}[x],+,\cdot)\,,$ tal que $p(x)=(x-3)q(x)$.

¡Éxito!