AUX EXTRA

Auxiliar Extra

Inducción, sumatorias, funciones, cardinalidad, estructuras algebraicas, complejos, polinomios

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 12 de julio de 2025

P1. [No todo es lo que parece]

Calcule $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}$, y para $a \neq 1$ demuestre que $\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}$.

También calcule la suma $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$

P2. [Funciones]

Sea $f\colon A \to A$ una función tal que $f\circ f\circ f\circ f = \mathrm{Id}_A$. Demuestre que f es biyectiva y encuentre su inversa.

P3. [Estructuras algebraicas]

Sea (W,Δ) un grupo finito de cardinalidad par, con neutro e. Demuestre que existe $a \in W, a \neq e$ tal que $a^{-1}=a$.

P4. [Raíces de complejos]

Determine todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $1+z+z^2+\cdots+z^n = \frac{1+z^n}{2}$.

P5. [Raíces de polinomios]

El polinomio $P(z) = 2z^3-(5+6i)z^2+9iz-3i+1$ admite una raíz real a. Determine todas las raíces de $P(z)$.

P6. [Detective con polinomios]

Sean $u,v,w \in \mathbb{C}$. Considere el sistema de ecuaciones dado por $\begin{cases} u+v+w=4 \\ uvw=4 \\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{2}\end{cases}$.

a) Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio dado por $P(x)=(x-u)(x-v)(x-w)$, donde u,v,w son las soluciones del sistema.

b) Pruebe que $P(x)=x^3-4x^2+6x-4$. Factorice el polinomio en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

P7. [Mezcla]

a) Sea $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ y $v \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera. Considere $R_v := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ es la raíz enésima de } v\}$ y $U := \{w \in \mathbb{C} \mid w \text{ es la raíz enésima de } 1\}$. Para $\hat{z} \in R_v$, la ley $*$ por $z_1 * z_2 = \frac{z_1\cdot z_2}{\hat{z}}$ $(\forall\, z_1,z_2 \in R_v)$.
i) Demuestre que $*$ es ley de composición interna en R_v. **ii)** Pruebe que $\phi\colon (R_v,*) \to (U,\cdot)$ tal que $\phi(z)=\frac{z}{\hat{z}}$ es un isomorfismo. **iii)** Pruebe que $(R_v,*)$ es grupo abeliano.

b) Se define $A[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$ por $A[x] := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(3)=0\}$.

i) Demuestre que $(A[x],+,\cdot)$ es un anillo, donde $+,\cdot$ son la suma y producto habituales de polinomios.

ii) ¿Es $(A[x],+,,)$ un anillo conmutativo? ¿Es $(A[x],+,\cdot)$ un anillo unitario? ¿Tiene $(A[x],+,,)$ divisores de cero? **iii)** Demuestre que $p(x) \in (A[x],+,\cdot,) \iff (\exists\, q(x)) : (\mathbb{R}[x],+,\cdot)$, tal que $p(x)=(x-3)q(x)$.

¡Éxito!

R_7

b)

b) Se define $A[x] \subsetneq \mathbb{R}[x]$ por $A[x] := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(3) = 0\}$

i) Demuestre que $(A[x], +, \cdot)$ es un anillo, donde $+, \cdot$ son la suma y producto habituales de polinomios.

ii) ¿Es $(A[x], +, \cdot)$ un anillo conmutativo? ¿Es $(A[x], +, \cdot)$ un anillo unitario? ¿Tiene $(A[x], +, \cdot)$ divisores de cero? **iii)** Demuestre que $p(x) \in (A[x], +, \cdot) \iff (\exists\, q(x) \in (\mathbb{R}[x], +, \cdot)$, tal que $p(x) = (x-3)q(x)$.

i) P.D.Q. $(A[x], +, \cdot)$ es anillo

$(A[X], +, \cdot)$

*) $(A[X], +)$ es grupo abeliano

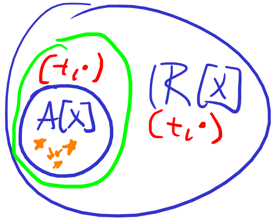
$\iff$ asocia, admita neutro, inverso $\forall$, conmuta

*) $\cdot$ asocie

*) $\cdot$ distribuya c/r $+$

*) $\cdot$ $\exists$ neutro de $\cdot$

def. anillo



*) $(A[X], +)$ es grupo abeliano

*) $+$ asocie $\rightarrow$ conmutativo

$P(x), Q(x), R(x) \in A[x]$

$(P(x) + Q(x)) + R(x) = P(x) + (Q(x) + R(x)) \iff \checkmark$

*) $+$ admite neutro

$(\exists\, e \in A[x])(\forall\, p(x) \in A[x]): e + p(x) = p(x) = e + p(x)$

$\iff \checkmark$, basta tomar $\boxed{e \equiv 0}$. $0 \in A[x]$, $0(3) = 0$.

*) inverso

$(\forall\, p(x) \in A[x])(\exists\, q(x) \in A[x]): p(x) + q(x) = 0$
$= q(x) + p(x)$

$\iff q(x) = -p(x)$; $p(x) \in \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow p_i \in \mathbb{R}$ $\quad p(x^*) = 0$

$\Rightarrow -p_i \in \mathbb{R}$ $\quad \Rightarrow \boxed{-p(x^*) = 0}$

$\Rightarrow -p \in \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow -p \in A[x]$

*) conmutatividad

$(\forall\, p(x), q(x) \in A[x]): p(x) + q(x) = q(x) + p(x) \iff \checkmark$ conmutatividad de $+$ def.

*) • asocia

*) • distribuya c/r +

*) • ∃ neutro de •

anillo sin unidad

*) • asocia

$(\forall p(x), q(x), r(x) \in A[x]) : (p(x) \circ q(x)) \circ r(x) = p(x) \circ (q(x) \circ r(x))$

$\iff V$, por herencia

*) • distribuya c/r +

$(\forall p(x), q(x), r(x) \in A[x]) : \quad p(x) \circ (q(x) + r(x))$
$= p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$

$\iff V$, anillo de polinomios

*) ∃ neutro de •

$(\exists u \in A[x])(\forall p(x) \in A[x]) : u \cdot p(x) = p(x) = p(x) \cdot u$ ✓

$\boxed{u = 1}$ $\quad 1 \cdot p(x) = p(x) = p(x) \cdot 1$

$u \in A[x]$,

$u = 1, \quad 1(3) = 1 \neq 0 \Rightarrow 1 \in A[x]$

ii) conmutativo?

¿$\bullet$ conmuta?

sí es $\bullet$ por $(\mathbb{R}[x], \cdot)$

$p(x)q(x) = q(x)p(x) \Leftrightarrow V.$

sí admite divisores de cero

$x \cdot y = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

$\Rightarrow x \neq 0 \vee y \neq 0$

unitario?

¿$\exists \mathbb{1}_{\bullet}$?

No lo es (si lo fuese, $\exists$ u t.q. $u\,p(x) = p(x) = p(x)\,u$
$\Rightarrow u = 1$, $1 \in A[x]$ $1(3) = 1 \neq 0$)

divisores de cero (dominio de integridad $\Leftrightarrow$ NO admite divisores de cero)

$(\exists\, p(x) \in A[X] \setminus \{0\})(\exists\, q(x) \in A[X] \setminus \{0\})$, $p(x) \bullet q(x) = 0$

No tiene divisores de cero

(Hacia contradicción, si tuviese, existiría $p(x), q(x)$, $p(x)q(x) = 0$, $p(x) \neq 0, q(x) \neq 0$

$\bullet \in \mathbb{R}$

$p(x) = 0$
$q(x) = 0$

iii) P.D.Q. $p(x) \in (A[x],+,\cdot) \iff \left(\exists\, q(x) \in (\mathbb{R}[x],+,\cdot)\right) : p(x) = (x-3)\,q(x)$

$\iff (x-3) \mid p(x)$ ... def.

En efecto,

Si $p(x) \in A[x] \iff p(x) \in \mathbb{R}[x] \wedge \underbrace{p(3)=0}$

$\iff$ 3 es raíz de p

$\iff (x-3) \mid p(x)$

def. / prop.

$\blacksquare$

P7 a)

a) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $v \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera. Considere $R_v := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ es la raíz enésima de } v\}$ y $U := \{w \in \mathbb{C} \mid w \text{ es la raíz enésima de } 1\}$. Para $\hat{z} \in R_v$, la ley $*$ por $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{\hat{z}}$ $(\forall\, z_1, z_2 \in R_v)$.

i) Demuestre que $*$ es ley de composición interna en R_v. **ii)** Pruebe que $\phi\colon (R_v, *) \to (U, \cdot)$ tal que $\phi(z) = \dfrac{z}{\hat{z}}$ es un isomorfismo. **iii)** Pruebe que $(R_v, *)$ es grupo abeliano.

$n \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow R_v := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ es raíz n-ésima } v\}$

$= \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = v\}$

$* \; U := \{w \in \mathbb{C} \mid w \text{ es raíz n-ésima } 1\}$

$= \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = 1\}$

$\underbrace{\hat{z} \in R_v}_{\text{tomo una raíz n-ésima de } v}$,

$$\begin{cases} * : R_v \times R_v \longrightarrow R_v \\ (z_1, z_2) \mapsto z_1 * z_2 = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{\hat{z}} \end{cases}$$

i) P.D.Q. $*$ l.c.i. en R_v

$(\forall\, z_1, z_2 \in R_v):\ z_1 * z_2 \in R_v$

Sean $z_1, z_2 \in R_v$.

Quiero que $z_1 * z_2 \in R_v$

$\Leftrightarrow z_1 * z_2$ raíz n-ésima de v

$\Leftrightarrow (z_1 * z_2)^n = v$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{z_1 \cdot z_2}{\hat{z}}\right)^n = v$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_1^n \cdot z_2^n}{\hat{z}^n} = v$

$\Leftrightarrow \dfrac{v \cancel{v}}{\cancel{v}} = v$

$\Leftrightarrow v = v$

$\Leftrightarrow \checkmark$ ■

ii) $\begin{cases} \phi : (R_v, *) \to (U, \cdot) \\ \quad z \mapsto \phi(z) = \dfrac{z}{\hat{z}} \end{cases}$

isomorfismo

* función
* iso: biyectividad
* morfismo $\phi(z * a) = \phi(z) \cdot \phi(a)$

} def. isomorfismo

I) P.D.Q. ϕ es función

Hay que ver que esté bien def.

* Notar que si $z \in R_v \Leftrightarrow z^n = v$,

¿ $\dfrac{z}{\hat{z}} \in U \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{\hat{z}}\right)^n = 1$?

$\Leftrightarrow \dfrac{z^n}{\hat{z}^n} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{v}{v} = 1$

$\Leftrightarrow v$

$(\forall y \in U)(\exists! x \in R_v): \phi(x) = y$

Sea $y \in U$,

Basta tomar $x \in R_v$, $\phi(x) = \dfrac{x}{\hat{z}}$, //

II) iso: biyectiva

inyectiva

Sean $z_1, z_2 \in R_v$ tq. $\phi(z_1) = \phi(z_2)$

P.D.Q. $z_1 = z_2$,

Como $\phi(z_1) = \phi(z_2) \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{\hat{z}} = \dfrac{z_2}{\hat{z}}$

$\Rightarrow z_1 = z_2$ //

$\therefore$ es iny.

epiyectiva

Sean $y \in U$.

P.D.Q. $(\exists x \in R_v): \phi(x) = y$

Basta tomar $x = y\hat{z}$

Pues $\phi(x) = \dfrac{x}{\hat{z}} = \dfrac{y\hat{z}}{\hat{z}} = y$ //

$x = y\hat{z}$

$\therefore$ es epi //

III) morfismo

$(\forall a, b \in R_v)$: $\phi(a * b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$

Sean $a, b \in R_v$.

$\phi(a * b) = \phi\left(\dfrac{a \cdot b}{\hat{z}}\right)$ (def. $*$)

$= \dfrac{\left(\frac{a \cdot b}{\hat{z}}\right)}{\hat{z}}$ (def. ϕ)

$= \dfrac{a \cdot b}{\hat{z}^2}$ (frac)

$= \dfrac{a}{\hat{z}} \cdot \dfrac{b}{\hat{z}}$ (asoc. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$)

$= \phi(a) \cdot \phi(b)$ ■

En virtud de I), II), III),

es isomorfismo

iii) P.D.Q. $(R_v, *)$ es g.a.

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{Conmuta} \\ \text{asocia} \\ \text{tenga neutro} \\ \text{tenga inverso } \forall \end{cases}$

I) Conmuta

Sean $a, b \in R_v$ $(a^n = v,\ b^n = v)$,

P.D.Q. $a * b = b * a$,

En efecto, $a * b \underset{\text{def.}}{=} \dfrac{a \cdot b}{\hat{z}} = \dfrac{b \cdot a}{\hat{z}} = b * a$ //

conmutatividad del cuerpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

II) asociativo

Sean $a, b, c \in R_v$.

P.D.Q. $a * (b * c) = (a * b) * c$

En efecto,

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{b \cdot c}{\hat{z}}\right)$$

$$= \frac{a \cdot \left(\frac{b \cdot c}{\hat{z}}\right)}{\hat{z}}$$

[asoc. de $\cdot$ en el cuerpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$]

$$= \frac{\left(\frac{a \cdot b}{\hat{z}}\right) \cdot c}{\hat{z}}$$

$$= (a * b) * c \quad //$$

III) elemento neutro

$(\exists e \in R_v)(\forall a \in R_v): e * a = a = a * b$

$\dfrac{e \cdot a}{\hat{z}} = a$

~~$1^n = v$~~ $1 \notin R_v$ $\|$ $\boxed{e = \hat{z} \in R_v}$ //

IV) tenga inverso

$(\forall a \in R_v)(\exists b \in R_v): a * b = \hat{z}^{\wedge}$ $(= b * a)$ conmutati

Sean $a \in R_v$

Tomemos $b = \dfrac{\hat{z}^2}{a}$ //

Pues $a * b = \dfrac{a \cdot b}{\hat{z}} \underset{b = \frac{\hat{z}^2}{a}}{=} a$ //

en virtud de I, II, III, IV),

es g.a.

P_6 a)

Sean $u, v, w \in \mathbb{C}$. Considere el sistema de ecuaciones dado por $\begin{cases} u+v+w=4 \\ uvw=4 \\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{2} \end{cases}$.

3 grado, $\{u, v, w\}$

$$\iff \frac{vw + uw + uv}{uvw} = \frac{3}{2} \iff vw + uw + uv = \frac{3}{2}\cdot 4$$

$$= 3 \cdot 2$$

$$= 6$$

a) Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio dado por $P(x) = (x-u)(x-v)(x-w)$, donde u, v, w son las soluciones del sistema. Pruebe que $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$. Factorice el polinomio en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

$$P(x) = (x-u)(x-v)(x-w)$$

$$= (x^2 - (u+v)x + uv)(x-w)$$

$$= x^3 - wx^2 - (u+v)x^2 + w(u+v)x + uvx - uvw$$

$$= x^3 - (u+v+w)x^2 + (uw+vw+uv)x - uvw$$

$$= x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

$$uw + vw + uv = 6$$

1: x^3-4x^2+6x-4

$\frac{r}{s}$

Como es ~~mónico~~ coef. enteros existen raíces $\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}$ t.q. $r|4$, $s|1$

$r=\pm1,\pm2,\pm4$ $(4=r\cdot k$, algún $k\in\mathbb{Z})$

$s=\pm1$

$\{\pm1,\pm2,\pm4\}$

$p(1)=-1\neq0$

$p(-1)=-1-4-6-4=-15\neq0$

$p(2)=8-16+12-4=0\longrightarrow 2$ es raíz

$p(-2)=-8-16-12-4\neq0$

$p(4)=64-64+24-4\neq0$

$p(-4)=-64-64+24-4\neq0$

- **[Polinomios a coeficientes enteros]**:
  - Sea $P\in\mathbb{R}[x]$. Si $\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}$ (i.e. r y s son primos relativos) es una raíz de P y $\{p_i\}_{i=0}^{n-1}\subseteq\mathbb{Z}$, entonces $r\mid p_0$ y $s\mid p_{n-1}$ (el numerador divide al coeficiente del término fijo, y el denominador divide al coeficiente del término de mayor grado).
  - Si $P\in\mathbb{R}[x]$ es mónico, con coeficientes $\{p_i\}_{i=0}^{n-1}$, entonces toda raíz racional de P es entera y divide a p_0.

Como 2 es raíz $\iff (x-2) \mid p(x)$

$\sqrt{b^2-4ac}$; $(-2)^2 - 4(1)(2)$
$= 4 - 8 < 0$

$x^3 - 4x^2 + 6x - 4$

$\mathbb{R}[x] \Rightarrow p(x) = (x-2)(x^2-2x+2)$

$= (x-2)(x-(1+i))(x-(1-i)) \in \mathbb{C}[x]$

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{\cancel{2} \pm \cancel{2}i}{\cancel{2}}$

$= 1 \pm i$

Ruffini

x^3	x^2	x	x^0	
1	−4	6	−4	2
$\boxed{\times}$	2	−4	4	
1	−2	2	0	
x^2	x	1	0	

$1 \cdot x^2 - 2x + 2$

P5

P5. [Raíces de polinomios]

El polinomio $P(z) = 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz - 3i + 1$ admite una raíz real a. Determine todas las raíces de $P(z)$.

Como a es raíz

$P(a) = 0$

$\iff 2a^3 - (5+6i)a^2 + 9ai - 3i + 1 = 0$

$\iff 2a^3 - 5a^2 - 6a^2 i + 9ai - 3i + 1 = 0$

$\iff (2a^3 - 5a^2) + (9a - 6a^2)i = -1 + 3i$

$\iff 2a^3 - 5a^2 = -1 \quad \wedge \quad 9a - 6a^2 = 3$

$-2 \quad 1$

$-3 \quad 3$

$2 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{4}{4} = -1$

$2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -3 \neq -1$

$\iff (6a^2 - 9a + 3) = 0$

$\iff (-2a+1)(-3a+3) = 0$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \vee \cancel{a = 1}$

$\boxed{a = \frac{1}{2}}$

z^3	z^2	z	z^0	
2	$-(5+6i)$	$9i$	$-3i+1$	$\frac{1}{2}$
$\boxed{\times}$	1	$-2-3i$	$-1+3i$	
2	$-4-6i$	$-2+6i$	0	

$$p(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\underset{a}{2}z^2 \underset{b}{-(4+6i)}z + \underset{c}{(-2+6i)}\right)$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad 36i^2$$

$$= \frac{(4+6i) \pm \sqrt{(4+6i)^2 - 4(2)(-2+6i)}}{4}$$

$$= \frac{(4+6i) \pm \sqrt{16 + \cancel{48i} - 36 + 16 \cancel{- 48i}}}{4}$$

$$= \frac{(4+6i) \pm \sqrt{-4}}{4} \qquad = \sqrt{-4} = \sqrt{4}\,i = 2i$$

$$= \frac{(4+6i) \pm 2i}{4}$$

$$= \frac{(2+3i) \pm i}{2}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2+3i+i}{2}, \frac{2+3i-i}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2+4i}{2}, \frac{2+2i}{2} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, 1+2i, 1+i \right\}$$

P4

P4. [Raíces de complejos]

Determine todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1+z^n}{2}$.

$z \in \mathbb{C}$, $z = \rho e^{i\theta}$

En efecto, Sea $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{1+z^n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{z^0}^{\,1} \cdot \frac{z^{(n-0)+1} - 1}{z-1} = \frac{1+z^n}{2}$$

$z \neq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{1+z^n}{2}, \quad z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 2(z^{n+1}-1) = (1+z^n)(z-1)$$

$$\Leftrightarrow 2z^{n+1} - 2 = z - 1 + z^{n+1} - z^n, \quad z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow z^{n+1} + z^n - z - 1 = 0, \quad z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow z^n(z+1) - (z+1) = 0, \quad z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow (z+1)(z^n - 1) = 0, \quad z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow z + 1 = 0 \vee z^n - 1 = 0, \quad z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \vee z^n = 1, \quad z \neq 1$$

raíces de la unidad

$$z = \sqrt[n]{|1|}\, e^{i\frac{2k\pi + \theta_0}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n$$

P_3

P3. [Estructuras algebraicas]

Sea (W, Δ) un grupo finito de cardinalidad par, con neutro e. Demuestre que existe $a \in W, a \neq e$ tal que $a^{-1} = a$.

$\exists$ elemento t.q. inverso es sí mismo

$n = 2$ $\longrightarrow$ heredaría alguno era el neutro $\longrightarrow$ $W \setminus \{e\} = \{a\} \longrightarrow a^{-1} = a$ //

a debe tener inverso $\leftarrow (W, \Delta)$ es grupo

$n = 2n, n > 1$

$$\longrightarrow |W \setminus \{e\}| = \underbrace{2n - 1}_{\text{impar de elementos}}$$

$$= \{\underbrace{(a_1, a_1^{-1}), (a_2, a_2^{-1}), \ldots, (a_{2n-3}, a_{2n-3}^{-1})}_{2n-2 \text{ elementos}}, \underbrace{a_{2n-1}}_{1 \text{ elem}}\}$$

paridad

$+$

Cada elemento tiene inverso porque (W, Δ) es grupo

$+$

el inverso es único $\forall$ elemento

Supongamos b, c son inversos de a, $b =$

$$\begin{cases} b \Delta a = e = a \Delta b \\ c \Delta a = e = a \Delta c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b = b \Delta e &= b \Delta (a \Delta c) \\ &= (b \Delta a) \Delta c \\ &= e \Delta c = c \end{aligned}$$

$b \neq c$ tiene únicos inversos //

P2

P2. [Funciones]

Sea $f : A \to A$ una función tal que $f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_A$. Demuestre que f es biyectiva y encuentre su inversa.

$f : A \to A$,

$\begin{cases} g \text{ biyectiva} \\ g \circ f = \mathrm{Id}_A \\ f \circ g = \mathrm{Id}_A \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ biyectiva} \\ g \text{ inversa} \end{cases}$

$$f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_A$$

$\longrightarrow$ $\circ$ es asociativa

$$\Leftrightarrow f \circ \underbrace{(f \circ f \circ f)}_{=: g} = \mathrm{Id}_A$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(f \circ f \circ f)}_{=: g} \circ f = \mathrm{Id}_A$$

$\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Cod}(f)$

$\mathrm{Cod}(g) = \mathrm{Dom}(f)$

En virtud del Teo, f biyectiva y $g = f \circ f \circ f$ inversa

P_1

Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}$, y para $a \neq 1$ demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}$.

También calcule la suma $1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}+\dfrac{7}{8}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$

$$\left(\sum_{j=k_0}^{n} a_j - a_{j-1} = a_n - a_{k_0-1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((n+k)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(n+j-1)(n+j)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left((n+k)\sum_{j=1}^{k}\frac{1-(n+j)+(n+j)}{(n+j-1)(n+j)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left((n+k)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\cancel{1-n-j}^{\,-1}}{\cancel{(n+j-1)}(n+j)} + \frac{\cancel{n+j}}{(n+j-1)\cancel{(n+j)}}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left((n+k)\sum_{j=1}^{k}\underbrace{\frac{-1}{n+j}}_{a_j} + \underbrace{\frac{1}{n+j-1}}_{a_{j-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((n+k)\left[\frac{-1}{n+k}+\frac{1}{n+1-1}\right]\right)$$

$$a_j = \frac{1}{n+j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (n+k)\left(\frac{-1}{n+k} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cancel{(n+k)} \frac{\cancel{-n}+\cancel{n}+k}{n\cancel{(n+k)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \quad //$$

Suma de Gauss

$a \neq 1$, P.D.Q. $\displaystyle \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k a^k}_{\Leftrightarrow\ 1\cdot a^1 + 2\cdot a^2 + \ldots + n a^n} = \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}$

Por inducción en n

C.B. $n=1$ $\displaystyle \sum_{k=1}^{1} k a^k = 1\cdot a^1 = a$;

$$\frac{a-(1+1)a^{1+1}+1\cdot a^{1+2}}{(1-a)^2} = \frac{a-2a^2+1\cdot a^3}{(1-a)^2}$$

$$= \frac{a(1-2a+a^2)}{(1-a)^2} = \frac{a\cancel{(1-a)^2}}{\cancel{(1-a)^2}} = a$$

H.I. para $n>1$, $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} k a^k = \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}$

P.D.Q. que se cumple para $n+1$: $\displaystyle \sum_{k=1}^{n+1} k a^k = \frac{a-(n+2)a^{n+2}+(n+1)a^{n+3}}{(1-a)^2}$

En efecto,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k a^k = \sum_{k=1}^{n} k a^k + \underbrace{(n+1)a^{n+1}}_{\text{término n-ésimo}} = \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2} + (n+1)a^{n+1}$$

separo índice

(2e.1)

denominador común

$$= \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2} + \frac{(n+1)a^{n+1}(1-a)^2}{(1-a)^2}$$

$$= \frac{a+(n+1)a^{n+1}\left(-1+(1-a)^2\right)+na^{n+2}}{(1-a)^2}$$

$$= \frac{a+(n+1)a^{n+1}\left(\cancel{-1}+\cancel{1}-2a+a^2\right)+na^{n+2}}{(1-a)^2}$$

$$= \frac{a+(n+1)a^{n+1}a(a-2)+na^{n+2}}{(1-a)^2} = \frac{a+(n+1)a^{n+2}(a-2)+na^{n+2}}{(1-a)^2}$$

$$= \frac{a + (n+1)a^{n+2}a + (n+1)a^{n+2}(-2) + na^{n+2}}{(1-a)^2}$$

$$= \frac{a + (n+1)a^{n+3} + a^{n+2}(\overbrace{-2n-2+n}^{-n})}{(1-a)^2}$$

$$= \frac{a + (n+1)a^{n+3} - (n+2)a^{n+2}}{(1-a)^2}$$

$$= \frac{a - (n+2)a^{n+2} + (n+1)a^{n+3}}{(1-a)^2} \quad //$$

$\therefore$ por inducción, se tiene. $\blacksquare$

P.D.Q. $\underbrace{1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^{k-1}}$$

$$\frac{1}{2^{-1}} = 2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k a^{k}$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2^{k}} - \frac{1}{2^{k}}\right)$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k}} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k}} = 4\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

$$4\left[\left.\frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}\right|_{a=\frac{1}{2}}\right] - 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right] //$$