DESARROLLO AUX 14

RAÍCES DE POLINOMIOS

MA1101-5

2025-1

Profesora: Hanne Van Den Bosch

Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

P1

$p(x), d(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$

$p(x) = ax^4 + bx^3 - 18x^2 + 15x - 5$

$d(x) = x^2 - 3x + 2$

$r(x) = 4x - 7$

$r(x)$ es el resto de dividir $p(x)$ por $d(x)$

$\Rightarrow (\exists\, q(x) \in \mathbb{C}[x]) : p(x) = d(x)q(x) + r(x)$ con $\overset{=1}{gr(r)} < \overset{=2}{gr(d)}$.

Determinar a, b.

> Aprovechar def. división de polinomios (divisor, dividendo, cociente y resto)

> Aprovechar raíces de un polinomio

Por la hipótesis, $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$, algún $q(x)$

$$\Leftrightarrow ax^4 + bx^3 - 18x^2 + 15x - 5 = (x^2 - 3x + 2)\,q(x) + (4x - 7)$$

$$\Leftrightarrow ax^4 + bx^3 - 18x^2 + 15x - 5 = (x-1)(x-2)\,q(x) + (4x - 7)$$

Por igualdad de polinomios:

$\underline{x=1} \Rightarrow a + b - 18 + 15 - 5 = 0 \cdot q(x) + (4 - 7)$

$\Leftrightarrow a + b - 8 = -3$

$\Leftrightarrow a + b = 5$

$\underline{x=2} \Rightarrow 16a + 8b - 72 + 30 - 5 = 0 \cdot q(x) + (8 - 7)$

$\Leftrightarrow 16a + 8b - 47 = 1$

$\Leftrightarrow 16a + 8b = 48$

$\Leftrightarrow 2a + b = 6$

Luego, hay que resolver $\begin{cases} a + b = 5 & (1) \\ 2a + b = 6 & (2) \end{cases}$: $(2) - (1)$: $a = 1$ $(1)'$; $(1)' \to (1)$: $b = 4$, determinando así lo pedido. ∎

P_2

P2

$p, q \in \mathbb{R}[x]$

$$p(x) = (2+\xi) + (\varepsilon+\xi)x + (\alpha-\delta)x^4 + (2\alpha+\gamma)x^5 + (\alpha+\beta)x^7$$

$$q(x) = 3 + (\xi+2)x + (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3 + (\beta+\gamma+1)x^4 + \beta x^5$$

Encontrar $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi \in \mathbb{R}$ t.q. $p = q$

Escriba el polinomio resultante.

Usar igualdad de polinomios

Dos polinomios si y solo si son iguales en coeficientes (y grado).

O sea:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2+\xi) + (\varepsilon+\xi)x + 0x^3 + (\alpha-\delta)x^4 + (2\alpha+\gamma)x^5 + (\alpha+\beta)x^7 \\ q(x) &= 3 + (\xi+2)x + (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3 + (\beta+\gamma+1)x^4 + \beta x^5 + 0x^7 \end{aligned}$$

(0): $2+\xi = 3 \iff \boxed{\xi = 1}$

(1): $\varepsilon + \xi = \xi + 2 \iff \boxed{\varepsilon = 2}$

(3): $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0 \iff \beta+\gamma+\delta = -\alpha$ (2)'

(4): $\alpha - \delta = \beta+\gamma+1 \iff \alpha = \beta+\gamma+\delta+1$ (3)'

(5): $2\alpha+\gamma = \beta \underset{(3)'',(7)'}{\iff} 2\cdot\frac{1}{2} + \gamma = -\frac{1}{2} \iff \boxed{\gamma = -\frac{3}{2}}$

(7): $\alpha+\beta = 0 \underset{(3)}{\iff} \boxed{\beta = -\frac{1}{2}}$ (7)'

(2)' → (3)': $\alpha = -\alpha + 1 \iff 2\alpha = 1 \iff \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$ (3)''

(3): $\delta = -\alpha-\beta-\gamma = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)$

$\iff \boxed{\delta = \frac{3}{2}}$

Sigue que
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \varepsilon \\ \delta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

y $\therefore$, $p(x) = q(x) = 3 + 3x - x^4 - \frac{1}{2}x^5$, calculando así lo pedido. ▨

P3

(P3) a) $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$

$x = i$ raíz de $p(x)$ con multiplicidad 2.

Encontrar todas las raíces

> Raíces complejas vienen de a pares: sí misma y conjugado

> Teorema Fundamental del Álgebra: puedo saber exactamente la cantidad de raíces de un polinomio, solo sabiendo su grado (raíces en $\mathbb{C}$) – contando multiplicidad –
> ↖ se pueden repetir

> Si un polinomio es raíz de $p(x)$, entonces dicho polinomio divide a $p(x)$

> Hay raíces que se pueden encontrar "al ojo"

En efecto,

Por Teorema Fundamental del Álgebra, como $gr(p) = 7 \geq 1$ y $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ pues sus coeficientes son complejos de parte imaginaria nula ($\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{C}$), entonces p tiene exactamente 7 raíces en $\mathbb{C}$, contando multiplicidad.

* Como i es raíz de multiplicidad 2 $\Rightarrow$ $-i$ es raíz de multiplicidad 2 $\longrightarrow$ 4 raíces.

Faltan 3 raíces.

* Notar que $p(1) = 1+2-1+1-2-1 = 0$ i.e., 1 es raíz de $p(x)$ $\longrightarrow$ 5 raíces.

Faltan 2 raíces

Como $i, -i$ son raíces de multiplicidad 2 y 1 es raíz de $P(x)$:

$$(x-i)(x-i)(x-(-i))(x-(-i))(x-1) \mid P(x)$$

$$\Leftrightarrow (x-i)(x-i)(x+i)(x+i)(x-1) \mid P(x) \quad -(-i)=+i$$

$$\Leftrightarrow (x^2-i^2)(x^2-i^2)(x-1) \mid P(x) \quad \text{suma por diferencia}$$

$$i^2=-1$$

$$\Leftrightarrow (x^2-(-1))(x^2-(-1))(x-1) \mid P(x)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(x^2+1)(x-1) \mid P(x)$$

$$\Leftrightarrow (x^4+2x^2+1)(x-1) \mid P(x)$$

$$\Leftrightarrow (x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1) \mid P(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists\, Q(x) \in \mathbb{C}[x]) : P(x) = (x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1)\,Q(x)$$

Encontremos $Q(x)$:

$$\begin{array}{l|l}
x^7+2x^5-x^4+x^3-2x^2-1 & (x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1) \\
-(x^7-x^6+2x^5-2x^4+x^3-x^2) & x^2+x+1 \\
\hline
\quad x^6+x^4-x^2-1 & \\
\quad -(x^6-x^5+2x^4-2x^3+x^2-x) & \\
\hline
\qquad x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 & \\
\qquad -(x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1) & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\therefore Q(x) = x^2+x+1 \to \text{en } \mathbb{R}$$

$$= \left(x-\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

raíces $\longrightarrow$ 7 raíces.

$$Q(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \left\{ i, i, -i, -i, 1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$ son las raíces de P. ∎

P3 b) Factorizar $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$

en $\mathbb{R}[x]$ quedan factores de polinomios cuadráticos cuyas raíces son NO reales

en $\mathbb{C}[x]$ quedan factores simples de todas las raíces

$$p(x) = (x-i)(x-i)(x-(-i))(x-(-i))(x-1)\left(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (x-i)^2(x-(-i))^2(x-1)\left(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathbb{C}[x]$$

$$= \left[(x-i)(x-(-i))\right]^2(x-1)(x^2+x+1)$$

$$= \left[(x^2-i^2)^2\right](x-1)(x^2+x+1)$$

$$= (x^2+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$$

$$= (x^4+2x+1)(x-1)(x^2+x+1) \in \mathbb{R}[x]$$

P4

P4 $p(x) = 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x - 2$ tiene una raíz racional
Determinar todas las raíces de $P(x)$. Justificar cada paso.

> Teorema Fundamental del Álgebra: puedo saber exactamente la cantidad de raíces de un polinomio, solo sabiendo su grado (raíces en $\mathbb{C}$) – contando multiplicidad –
> ← se pueden repetir

Por Teorema Fundamental del Álgebra, como $gr(p) = 5 \geq 1$ y $p \in \mathbb{C}[x]$ pues sus coeficientes son complejos de parte imaginaria nula ($\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{C}$), el polinomio $p(x)$ tiene exactamente 5 raíces, considerando multiplicidad.

> Si tiene raíz racional, entonces $\begin{cases} * \text{ numerador divide al término indep} \\ * \text{ denominador divide al término de mayor grado} \end{cases}$

* Sea $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ la raíz racional, con r, s primos relativos.
Por propiedad $r \mid -2$ y $s \mid 2 \iff \begin{cases} * -2 = rk, \text{ algún } k \in \mathbb{Z} \\ * \ 2 = s\,l, \text{ algún } l \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} * \ r = \{\pm 2, \pm 1\} \\ * \ s = \{\pm 2, \pm 1\} \end{cases}$

O sea que $\frac{r}{s} = \pm 2$ ó $\frac{r}{s} = \pm 1$

> Hay raíces que se pueden encontrar "al ojo"

Notar que:

* $p(1) = 2 - 2 - 4 + 4 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de p

* $p(-1) = -2 - 2 + 4 + 4 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow -1$ es raíz de p

> Si un polinomio es raíz de $p(x)$, entonces dicho polinomio divide a $p(x)$

Como 1 es raíz de $p(x) \Rightarrow (x-1) \mid p(x)$

$$\Leftrightarrow \left(\exists\, Q(x) \in \mathbb{C}[x]\right) : p(x) = (x-1)Q(x)$$

Podemos encontrar $Q(x)$ de la forma usual:

$$
\begin{array}{rl}
2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x - 2 & \underline{\big|\; x-1 \qquad} \\
-\left(2x^5 - 2x^4\right) \qquad\qquad\qquad & 2x^4 - 4x^2 + 2 =: Q(x) \\
\hline
-4x^3 + 4x^2 + 2x - 2 & \\
-\left(-4x^3 + 4x^2\right) \qquad\quad & \\
\hline
2x - 2 & \\
-\left(2x - 2\right) & \\
\hline
0_{//} &
\end{array}
$$

O con el Algoritmo de Ruffini:

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	raíz
2	-2	-4	4	2	-2	1
$\boxed{\times}$	$2\cdot 1$	$0\cdot 1$	$-4\cdot 1$	$0\cdot 1$	$2\cdot 1$	
2	$-2+2\cdot 1 = 0$	$-4+0\cdot 1 = -4$	$4+-4\cdot 1 = 0$	$2+0\cdot 1 = 2$	$-2+2\cdot 1 = 0_{//}$	
x^4	x^3	x^2	x^1	x^0		

$$\therefore Q(x) = 2x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 2 = 2x^4 - 4x^2 + 2_{//}$$

Sigue que $p(x) = (x-1)\overbrace{\left(2x^4 - 4x^2 + 2\right)}^{=:Q(x)}$

Se quisiera seguir factorizando $\rightarrow$ requiero raíces de $Q(x)$

* $Q(1) = 2 - 4 + 2 = 0 \Rightarrow 1$ raíz de Q
* $Q(-1) = 2 - 4 + 2 = 0 \Rightarrow -1$ raíz de Q

Por algoritmo de Ruffini:

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
2	0	-4	0	2	1
$\boxtimes$	$2\cdot 1$	$2\cdot 1$	$-2\cdot 1$	$-2\cdot 1$	
2	$0+2\cdot 1$ $=2$	$-4+2\cdot 1$ $=-2$	$0-2\cdot 1$ $=-2$	$2+(-2)\cdot 1$ $=0$ //	

$$\therefore \tilde{Q}(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$$

O sea que $P(x) = (x-1)(x-1)(2x^3+2x^2-2x-2)$

Ahora con -1, que debe dividir $\tilde{Q}(x)$ pues es raíz de $P(x)$

Por Ruffini:

x^3	x^2	x	1	
2	2	-2	-2	-1
$\boxtimes$	$2(-1)$	$0(-1)$	$-2(-1)$	
2	$2+2(-1)$ $=0$ //	$=-2$ //	$-2+-2(-1)$ $=0$ //	

$$\therefore \tilde{\tilde{Q}}(x) = 2x^2 - 2$$

O sea que $P(x) = (x-1)(x-1)(x-(-1))(2x^2-2)$

Como -1 es raíz de Q y $\tilde{\tilde{Q}}$ divide Q, -1 es raíz; por Ruffini:

x^2	x^1	x^0	
2	0	-2	-1
$\boxtimes$	$2(-1)$	$-2(-1)$	
2	$0+2(-1)$ $=-2$	$-2+-2(-1)$ $=0$ //	

$$\therefore \tilde{\tilde{\tilde{Q}}}(x) = 2x - 2$$

O sea que $P(x) = (x-1)(x-1)(x-(-1))(x-(-1))(2x-2)$

$$= 2(x-1)(x-1)(x-(-1))(x-(-1))(x-1)$$

O sea que 1 es raíz de $P(x)$ de multiplicidad 3
-1 es " " " " " 2 $\blacksquare$

P5

P5 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomio mónico, $gr(p)=3$.

- $p(x)$ divisible por $(x-1)$
- los restos de sus divisores por $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$ son iguales

Determinar $p(x)$ y encontrar raíces

Como $p(x)$ es mónico de grado 3, $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

Por Teorema Fundamental del álgebra, como $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, en particular $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ (complejos de parte imaginaria nula), y $gr(p)=3$, entonces $p(x)$ posee exactamente 3 raíces en $\mathbb{C}$, contando multiplicidad.

Como $(x-1) \mid p(x) \Rightarrow \boxed{1 \text{ es raíz de } p(x)} \Rightarrow p(1)=0$

$\Leftrightarrow$

$(\exists\, q(x) \in \mathbb{R}[x]) : p(x) = (x-1)q(x)$

También, $p(x) = (x-1)q(x) \cdot (x-2) + p(2)$

$= (x-1)q(x) \cdot (x-3) + p(3)$, pues el resto de sus divisores es igual

$= (x-1)q(x) \cdot (x-4) + p(4)$

$(x-2)$
$(x-3)$
$(x-4)$

Por Teorema del resto, el resto de dividir

* $p(x)$ por $(x-2)$ es $p(2)$
* $p(x)$ por $(x-3)$ es $p(3)$
* $p(x)$ por $(x-4)$ es $p(4)$

$\left.\right\} \; p(2) = p(3) = p(4)$

* $p(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b + c = 0 \Rightarrow a+b+c = -1$ (!)
* $p(2) = 8 + 4a + 2b + c$
* $p(3) = 27 + 9a + 3b + c$
* $p(4) = 64 + 16a + 4b + c$

$* \; p(2) \overset{!}{=} p(4)$

$\Rightarrow 8+4a+2b+c = 64+16a+4b+c \quad / -c$

$\Rightarrow 8+4a+2b = 64+16a+4b \quad / : 2$

$\Rightarrow 4+2a+b = 32+8a+2b \quad / -4-2a-b$

$\Rightarrow 0 = 28+6a+b$ (1)

$* \; p(3) \overset{!}{=} p(4)$

$\Rightarrow 27+9a+3b+c = 64+16a+4b+c$

$\Rightarrow 27+9a+3b = 64+16a+4b$

$\Rightarrow 0 = 37+7a+b$ (2)

(2)-(1): $\Rightarrow 0 = 9+a$

$\Rightarrow \boxed{-9 = a}$ (★)

(★) → (1): $\Rightarrow 0 = 28+6(-9)+b$

$\Rightarrow 0 = 28-54+b$

$\Rightarrow 0 = 26+b$

$\Rightarrow \boxed{26 = b}$ (✱)

(★),(✱) → (II): $-9+26+c = -1$

$\Rightarrow 17+c = -1$

$\Rightarrow \boxed{c = -18}$

Luego, $p(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 18$

Como $(x-1) \mid p(x)$

$$\Leftrightarrow \left(\exists\, q(x) \in \mathbb{R}[x]\right) : p(x) = (x-1)\cdot q(x)$$

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 18 \;\underline{\big|\; x-1 \quad}\; = x^2 - 8x + 18$$

$$\underline{-(x^3 - x^2)}$$

$$-8x^2 + 26x - 18$$

$$\underline{-(-8x^2 + 8x)}$$

$$18x - 18$$

$$\underline{-(18x - 18)}$$

$$0 \;//$$

$$\Rightarrow r(x) = x^2 - 8x + 18 \rightsquigarrow ax^2 + bx + c \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 18 \end{cases}$$

Por Fórmula de Bháskara encontramos sus raíces: $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\Rightarrow \text{raíces} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 72}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2} = \frac{2(4 \pm \sqrt{2}\,i)}{2} = 4 \pm \sqrt{2}\,i$$

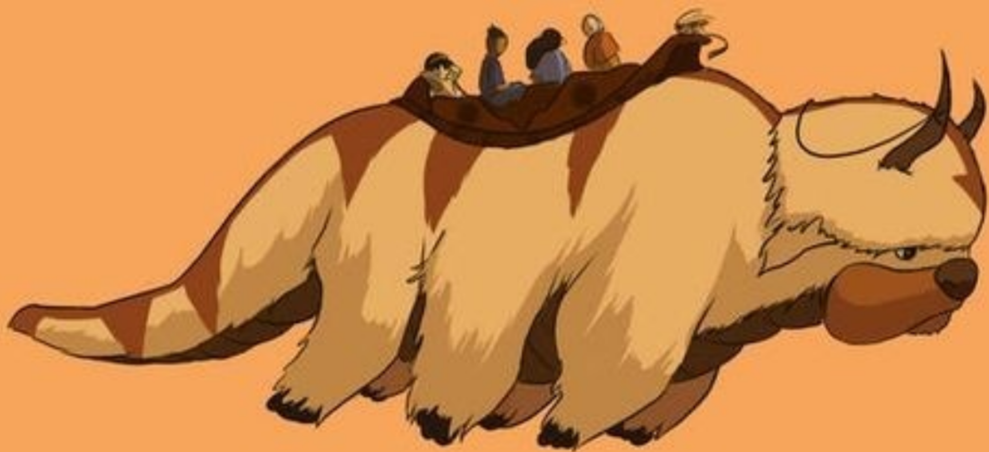
Así, las raíces de $r(x)$ son $\boxed{4 + \sqrt{2}\,i}$ y $\boxed{4 - \sqrt{2}\,i}$

y como las raíces de los factores de un polinomio son las propias raíces del polinomio, entonces las raíces de $p(x) \in \{1,\ 4+\sqrt{2}\,i,\ 4-\sqrt{2}\,i\}$. ∎

Así concluye su curso de Intro. al Álgebra :)
(y su primer semestre en esta nueva etapa universitaria!)

Espero que hayan disfrutado todos los conceptos que visitamos en el curso. Con el tiempo los irán madurando, y se darán cuenta que les permitirán ver el mundo de una forma diferente, más lógica, más sistemática, más conectada.

Les felicito por haber concluido este proceso. Reflexionen sobre sus éxitos y cosas a mejorar. Y si tienen dudas, siempre pueden escribirme*!



No olviden siempre aprender :)

-Bianca.

* bianca.zamora@ug.uchile.cl / hola.bianca.zamora.araya@gmail.com