Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-5 Intro. al Álgebra · Otoño 2025

Auxiliar 14[1]

Raíces de un polinomio

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 30 de junio de 2025

P1. [Detective]
Considere los polinomios $p(x), d(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$, definidos por:

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^4 + bx^3 - 18x^2 + 15x - 5 \\ d(x) &= x^2 - 3x + 2 \\ r(x) &= 4x - 7 \end{aligned}$$

Determine los valores de los reales a, b si el resto de dividir $p(x)$ por $d(x)$ es $r(x)$.

P2. [Más investigación]
Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2+\zeta) + (\epsilon+\zeta)x + (\alpha-\delta)x^4 + (2\alpha+\gamma)x^5 + (a+b)x^7 \\ q(x) &= 3 + (\zeta+2)x + (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3 + (\beta+\gamma+1)x^4 + \beta x^5 \end{aligned}$$

Determine los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \in \mathbb{R}$ tales que $p = q$. Escriba el polinomio resultante.

P3. [Hallando raíces]
Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$.

a) Encuentre todas las raíces de $p(x)$ sabiendo que i es raíz de $p(x)$ con multiplicidad 2. Justifique.
b) Factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

P4. [Uno]
Se sabe que el polinomio $P(x) = 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x - 2$ tiene una raíz racional. Determine todas las raíces de $P(x)$ y justifique cada paso.

P5. [Buscando]
Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomio tal que:

- $p(x)$ es mónico de grado 3,
- $p(x)$ es divisible por $(x-1)$,
- los restos de sus divisiones por $(x-2), (x-3), (x-4)$ son iguales.

Determine $p(x)$ y encuentre sus raíces.

[1] Siendo el último auxiliar del semestre, espero que les haya podido transmitir lo interesante, bonito, útil y "lógico" que las matemáticas pueden llegar a ser. Para mí este curso es uno de los mejores de plan común porque una vez entendidos los conceptos, su forma de ver el mundo va a cambiar. Ahora cuentan con todas las herramientas necesarias para "hablar" el lenguaje de las matemáticas, ¡aprovéchenlas! (:

Principales definiciones y propiedades

- **[Igualdad de polinomios]**: Dos polinomios son iguales si y solo si tienen el mismo grado y coeficientes. Otra caracterización de igualdad es:

  Sean $n \geq 0$ y $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ tales que $\mathrm{gr}(P) \leq n$ y $\mathrm{gr}(Q) \leq n$. Si P y Q coinciden en $n+1$ puntos distintos, entonces son iguales como polinomios.
- **[Raíz de un polinomio]**: Corresponden a los valores que anulan a un polinomio. Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $\beta \in \mathbb{K}$, entonces β es raíz de $P \iff P(\beta) = 0 \iff (x-\beta) \mid P(x)$.
  - Si $\beta_1, \beta_2, \beta_k$ son raíces distintas de P, entonces $(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_k) \mid P(x)$.
  - Si $P \in \mathbb{K}[x]$ es tal que $\mathrm{gr}(P) = n \geq 1$, entones P posee a lo más n raíces distintas.
- **[Multiplicidad de raíces]**: Una raíz $\beta \in \mathbb{K}$ es *raíz de multiplicidad* $l \in \mathbb{N}^*$ *del polinomio* $P \in \mathbb{K}[x]$ si y solo si $(x-\beta)^l \mid P(x)$ y $(x-c)^{l+1}$ no divide a P.
- **[Teorema de la División de polinomios]**:

  Sean $P, D \in \mathbb{K}[x]$ polinomios, con $D \neq 0$.

  Entonces $(\exists!\, Q, R \in \mathbb{K}[x])\, (\forall\, x \in \mathbb{K}[x])$:
  - $P = Q \cdot D + R$ ($\iff P : D = Q \cdots R$)

    Se llama **división con resto de** P **por** D, donde Q es el **cociente** y R es el **resto**.
  - $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D)$

  Si $R \equiv 0 \implies D \mid P$ ($\iff (\exists\, Q \in \mathbb{K}[x]) : P = Q \cdot D$
- **[Teorema del Resto]**: Sean $P \in \mathbb{K}[x]$ y $\beta \in \mathbb{K}$. El resto de dividir P por $(x-\beta)$ es exactamente $P(\beta)$.
- **[Teorema Fundamental del Álgebra]**:

  Si $P \in \mathbb{C}[x]$ es tal que $gr(P) \geq 1$, entonces P posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.
- **[Teorema Fundamental del Álgebra II]**:

  Si $P \in \mathbb{C}[x]$ es tal que $gr(P) = n \geq 1$, entonces P tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$, contando multiplicidad.
- **[Factorización en $\mathbb{C}$]**:
  - Si $P \in \mathbb{C}[x]$ es tal que $\mathrm{gr}(P) = n \geq 1$, entonces existen $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$ y naturales $l_1, l_2, \ldots, l_m \geq 1$ tales que $\mathrm{gr}(P) = l_1 + l_2 + \cdots + l_m$ y

    $$P(x) = a(x-\beta_1)^{l_1}(x-\beta_2)^{l_2}\ldots(x-\beta_m)^{l_m}$$

    donde $\alpha = p_n$ (coeficiente del término de grado n) y β_i es una raíz de multiplicidad l_i de P $(\forall\, i \in [1..m])$.
  - Las raíces complejas siempre vienen de a pares: el complejo y su conjugado. Formalmente: si $P \in \mathbb{C}[x]$ tal que todos sus coeficientes están en $\mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces el conjugado $\overline{z}$ también es una raíz de P.
- **[Factorización en $\mathbb{R}$]**:
  - Si $P \in \mathbb{R}[x]$ es tal que $\mathrm{gr}(P) = n \geq 1$, entonces existen valores α, $\{\beta_i\}_{i=1}^m$, $\{p_i, q_i\}_{i=1}^s \subseteq \mathbb{R}$ t.q.:

    $$P(x) = \alpha \prod_{i=1}^{m}(x-\beta_i) \prod_{i=1}^{s}(x^2 + p_1 x + q_1)$$

    Donde α es el coeficiente p_n de P, $\{\beta_i\}_{i=1}^m$ son las raíces reales de P y los factores cuadráticos no tienen raíces reales.
- **[Polinomios a coeficientes enteros]**:
  - Sea $P \in \mathbb{R}[x]$. Si $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (i.e. r y s son primos relativos) es una raíz de P y $\{p_i\}_{i=0}^{n-1} \subseteq \mathbb{Z}$, entonces $r \mid p_0$ y $s \mid p_{n-1}$ (el numerador divide al coeficiente del término fijo, y el denominador divide al coeficiente del término de mayor grado).
  - Si $P \in \mathbb{R}[x]$ es mónico, con coeficientes $\{p_i\}_{i=0}^{n-1}$, entonces toda raíz racional de P es entera y divide a p_0.
- **[Cofre de tesoros cósmicos de Rubin]**:

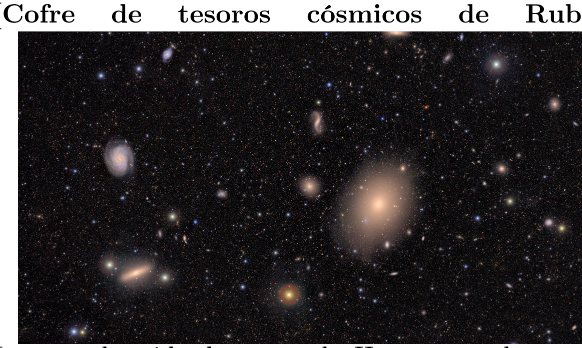

Imagen obtenida de esta web. Hace pocos días se publicó la *primera luz* del observatorio Vera C. Rubin de NSF-DOE, ubicado en el Cerro Pachón en el norte de Chile. En esta imagen, se muestran unos 10 millones de galaxias. La capacidad de Rubin transformará la ciencia con su investigación del Espacio-Tiempo.