Auxiliar 13

Raíces de un complejo y polinomios

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 23 de junio de 2025

P1. [Primeros pasos]

a) Sea $m \in \mathbb{N}$. Escriba $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ en forma polar y pruebe que $6 \mid m \iff \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2$.

Indicación: Para probar el implica hacia la izquierda, estudie qué ocurre si m es par o *impar*:

b) Demuestre que $(\forall\, n \in \mathbb{N})\,(\forall\, \rho \in \mathbb{R}) : \left(1 - \rho e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 + \left(1 + \rho e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n \in \mathbb{R}$.

P2. [Suma]

a) Sean $n \geq 2$ y $w \in \mathbb{C}$. Demuestre que la suma de las raíces n-ésimas de w vale cero, es decir, que si $w_0, \ldots, w_{n-1}$ son raíces n-ésimas de 1, entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$ También muestre que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$ $(\forall\, k \in [1..n-1])$.

b) Sea $m \in [0..n-1]$ y $p(X) \in \mathbb{C}[x]$ definido por $p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. Demuestre que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} p(w_j) = p(0)$.

P3. [*Roots*]
Para $z \in \mathbb{C}$, resuelva las ecuaciones **a)** $z^4 - 5i = 0$ **b)** $z^3 + i = 0$.

P4. [*More roots*]

Considere $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \geq 2$. Encuentre las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) = i \sum_{k=0}^{n-1} z^k \sin(-k\theta)$.

P5. [Condiciones]

Encuentre los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$.

P6. [A partir de algo]

a) Encuentre las soluciones de la ecuación $w^n = -1$ para $n \geq 2$.

b) Considere el complejo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ y $\overline{z} \neq -1$. Resuelva la ecuación $\left(\dfrac{1+z}{1+\overline{z}}\right)^n = -1$ para $n \geq 2$.

P7. [¿Coincidencia?]
Muestre que las raíces de la ecuación cuadrática $z^2 + z + 1 = 0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1.

P8. [División de polinomios]
Desarrolle las siguientes divisiones entre polinomios.

a) $\dfrac{27x^3 + 9x^2 - 3x - 9}{3x - 2}$ **b)** $\dfrac{x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 6}{x + 3}$ **c)** $\dfrac{3x^4 + 9x^3 - 5x^2 - 6x + 2}{3x^2 - 2}$

Principales definiciones y propiedades

- **[Representaciones de un número complejo]**: Un número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ se puede representar de forma **cartesiana** o **forma polar**.
  - **[Representación cartesiana]**: Se escribe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, donde $a =: \mathbb{R}\mathrm{e}(z)$ se denomina **parte real** y $b =: \mathbb{I}\mathrm{m}$ se denomina **parte imaginaria**. Esta escritura suele ser cómoda para sumar.
    - $\mathbb{R}\mathbf{e}(z \pm w) = \mathbb{R}\mathbf{e}(z) \pm \mathbb{R}\mathbf{e}(w)$
    - $\mathbb{I}\mathbf{m}(z \pm w) = \mathbb{I}\mathbf{m}(z) \pm \mathbb{I}\mathbf{m}(w)$
    - $\mathbb{R}\mathbf{e}(\beta z) = \beta \mathbb{R}\mathbf{e}(z)$
    - $\mathbb{I}\mathbf{m}(\beta z) = \beta \mathbb{I}\mathbf{m}(z)$
    - Dos complejos son iguales si y sólo si coinciden en parte real y en parte imaginaria (igualdad de 2-tuplas).
  - **[Representación polar]**: Se escribe $z = \rho e^{i\theta}$ donde $\rho \equiv |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ se denomina **módulo** y $\theta \equiv \arg(z) := \mathbf{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \in [0, 2\pi)$ y se denomina **argumento**. Esta escritura suele ser cómoda para productos y cálculo de inversos.
    - $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ $(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$
    - $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \bmod 2\pi$
    - $\arg(z^k) = k \cdot \arg(z) \bmod 2\pi$
    - **[Fórmula de Moivre]**: $\left(e^{i\theta}\right)^k = e^{i(k\theta)}$
    - $\arg(\overline{z}) + \arg(z) = 2\pi$
    - $z^{-1} = \left(\frac{1}{|z|}\right) e^{i\arg(z)} = \left(\frac{1}{|z|}\right) e^{-i\arg(z)}$
    - $e^{in\theta} = e^{i\theta_0} \iff n\theta = \theta_0 \ \mathbf{mod}\ 2\pi$
      $\iff (\exists\, k \in \mathbb{Z}) : n\theta = \theta_0 + 2k\pi$
      $\iff (\exists\, k \in \mathbb{Z}) : \theta = \dfrac{\theta_0 + 2k\pi}{n}$

  La relación entre ambas representaciones está dada por la identidad de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Así:

  $$a + ib = \rho e^{i\theta} \iff a + ib = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)$$

  O sea que $a = \rho\cos(\theta)$ y $b = \rho\sin(\theta)$.

- **[Propiedades de números complejos]**: Sean $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{C}$ con $|z| = r$ y $|w| = s$. Entonces:
  - **[Potencias]:** Para $k \in \mathbb{Z}$
    - $z^0 = 1$
    - $z^{k+1} = z^k \cdot z$, si $k \geq 0$
    - $\left(z^{-1}\right)^{-k} = z^k$ si $k < 0$
  - **[Módulo]**
    - $|z| \geq 0 \wedge |z| = 0 \iff z = (0, 0)$
    - $|z| \geq |\mathbb{R}\mathrm{e}(z)$ y $|z| \geq \mathbb{I}\mathrm{m}(z)$
    - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
    - $|z^k| = |z|^k$, $k \in \mathbb{Z}$
    - $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, si $w \neq (0, 0)$
    - $|z + w| \leq |z| + |w|$
  - **[Conjugado]**:
    - $z = a + ib \iff \overline{z} = a - ib$
    - $\overline{\overline{z}} = z$
    - $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$
    - $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$
    - $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
    - $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$
    - $z + \overline{z} = 2\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = 2\mathbb{R}\mathrm{e}(\overline{z})$
    - $z - \overline{z} = 2\mathbb{I}\mathrm{m}(z) = 2\mathbb{I}\mathrm{m}(\overline{z})$
    - $|\overline{z}| = |z|$
    - $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
    - $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, $z \neq (0, 0)$

- **[Raíz enésima de un complejo]**: $z \in \mathbb{C}$ es raíz n-ésima de $w \in \mathbb{C}$ si y solo si $z^n = w$ ($\sqrt[n]{w} = z$).
- **[Soluciones de raíces de complejos]**: Sean $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$. $z^n = w$ tiene exactamente n soluciones $w_0, \ldots, w_k, w_{n-1} \in \mathbb{C}$, donde $w_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\right)}$
- **[Raíz enésima de la unidad]**: z es raíz n-ésima de $w = 1$ si y solo si $z^n = 1$. De lo anterior, se desprende que $z^n = 1 \iff \sqrt[n]{1} = w \iff w^n = 1 \implies w^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ para $k \in [0..(n-1)]$.
- **[Suma de raíces enésimas]**: La suma de las raíces enésimas es siempre nula. Si $w_0, \ldots, w_{n-1}$ son raíces n-ésimas de w, entonces $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Polinomio]**: Corresponde a una expresión que contiene *variables* (también denominadas *indeterminadas*) y *constantes* (también denominadas *coeficientes*), que involucra operaciones de adición, multiplicación y exponenciación a exponentes enteros.

  Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una función $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tal que

  $$x \mapsto P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

  donde $n \in \mathbb{N}$ es el **grado**, siempre que $p_n \neq 0$, y $p_k \in \mathbb{Z}\,(\forall\, k \in [0..n])$ son los **coeficientes**.

- **[Conjunto de polinomios]**: Al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ se denota $\mathbb{K}[x]$.

- **[Grado de un polinomio]**: Corresponde al mayor exponente de un polinomio tal que el coeficiente no sea nulo.
  - El grado de una suma de polinomios es el mayor grado entre ambos polinomios.
  - El grado de un producto de polinomios es el producto de los grados de los polinomios.
  - **gr** $= -\infty$: **polinomio nulo** (convención)
  - **gr** $= 0$: constantes no nulas
  - **gr** $= 1$: polinomio lineal
  - **gr** $= 2$: polinomio cuadrático
  - **gr** $= 3$: polinomio cúbico

- **[Propiedades de polinomios]**:
  - **[Igualdad de polinomios]**: Dos polinomios son iguales si y solo si tienen el mismo grado y coeficientes.
  - $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{K}}, +, \cdot\right)$ es un anillo conmutativo. Como los polinomios están en $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, entonces también heredan estas propiedades: la suma (producto) de polinomios conmuta, asocia, tiene inverso aditivo (multiplicativo) para cada uno de sus elementos y admite neutro aditivo (multiplicativo) único polinomio idénticamente igual a cero (a uno).
  - El conjunto de los polinomios es un dominio de integridad, es decir, no admite divisores de cero (i.e. para un elemento no nulo, no existe un elemento no nulo tal que su producto sea el neutro aditivo)

- **[División de polinomios]**:
  Sean $P, D \in \mathbb{K}[x]$ polinomios, con $D \neq 0$.
  Entonces $(\exists!\, Q, R \in \mathbb{K}[x])\,(\forall\, x \in \mathbb{K}[x])$:
  - $P = Q \cdot D + R$ ($\iff$ $P : D = Q \cdots R$)
    Se llama **división con resto de** P **por** D, donde Q es el **cuociente** y R es el **resto**.
  - $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D)$

  Si $R \equiv 0 \implies D \mid P \iff (\exists\, Q \in \mathbb{K}[x]) : P = Q \cdot D$