DESARROLLO AUX 13

RAÍCES DE UN COMPLEJO Y POLINOMIOS

MA1101-5

2025-1

Profesora: Hanne Van Den Bosch

Auxiliar: Bianca Zamora Araya

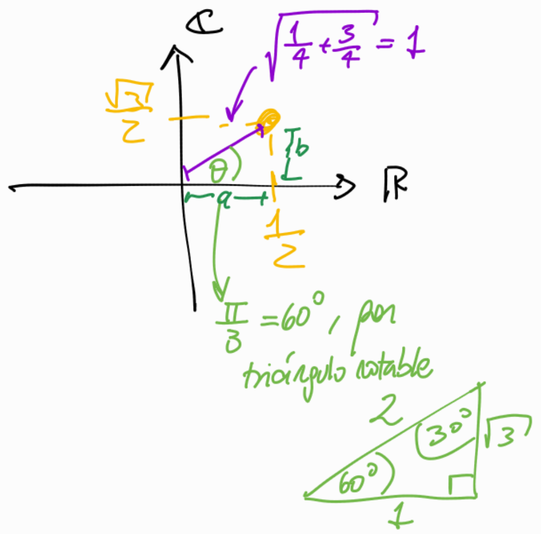
P_1

P1) a) Escribir $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ en forma polar. Dibujito

P.D.Q. $6|m \iff \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2$ Usar def.

En efecto,
Escribiendo $z := \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ en forma polar:

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Rightarrow \boxed{z = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}}$$ //

Ahora la equivalencia:

$\Longrightarrow$) Supóngase que $\underbrace{6|m}_{\text{"m divisible por 6"}} \iff (\exists k \in \mathbb{Z}): m = 6k$

Luego $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m$

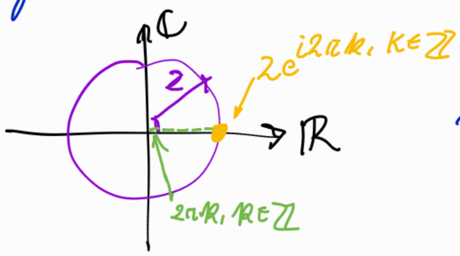
$$= \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{6k} + \left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{6k}, \text{ algún } k \in \mathbb{Z}$$

$$= e^{\cancelto{2\pi k}{i\frac{\pi}{3}6k}} + \cancelto{1}{(-1)^{\underbrace{6k}_{\text{par}}}} e^{\cancelto{2\pi k}{i\frac{\pi}{3}6k}}, \text{ algún } k \in \mathbb{Z}$$

$$= e^{i2\pi k} + e^{i2\pi k}, \text{ algún } k \in \mathbb{Z}$$

$$= 2e^{i2\pi k}, \text{ algún } k \in \mathbb{Z}$$

De forma gráfica:



y es $2 + i0$ //

Sigue que $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2$. □

$\Leftarrow$ | Supóngase que $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2$

P.D.Q. $6|m$

Siguiendo la indicación, se va a ver los casos en que m par o impar.

Notar que $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2$ par

$$\iff \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + (-1)^m\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2$$

Si m fuese impar $\Rightarrow (-1)^m = -1$ y el lado izq. sería 0 $(\neq 2)$ lo cual conduce hacia una contradicción. Sigue que m no es impar! i.e. m es par.

Luego, como m es par: $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \cancel{(-1)}^{\,1\,m}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2$

$$\iff 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2$$

$$\iff \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 1$$

transformamos a forma polar

$$\iff \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^m = \underbrace{1}_{1\cdot e^{i2\pi k},\ k\in\mathbb{Z}}$$

$$\iff \frac{\cancel{\pi}}{3}m = 2\cancel{\pi}k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff m = 6k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff 6|m \ \square$$

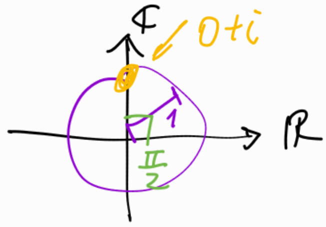
(P1) b) P.D.Q. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \rho \in \mathbb{R}): (1-\rho e^{i\frac{\pi}{2}})^n + (1+\rho e^{i\frac{\pi}{2}})^n \in \mathbb{R}$

Notar que $\alpha \in \mathbb{C}$ es t.q. $\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = \overline{\alpha}$
Basta ver esto.

Sean $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathbb{R}$.

En efecto,
Se quisiera ver que si $\alpha := (1-\rho e^{i\frac{\pi}{2}})^n + (1+\rho e^{i\frac{\pi}{2}})^n$, entonces $\alpha = \overline{\alpha}$.

Pero notar que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$



$$\Rightarrow \alpha := (1-\rho i)^n + (1+\rho i)^n$$

$$\Rightarrow \overline{\alpha} = \overline{(1-\rho i)^n} + \overline{(1+\rho i)^n}$$

conjugado de suma es suma de conjugados

$$= \underbrace{\overline{(1-\rho i)}\,\overline{(1-\rho i)}\cdots\overline{(1-\rho i)}}_{n \text{ veces}} + \underbrace{\overline{(1+\rho i)}\,\overline{(1+\rho i)}\cdots\overline{(1+\rho i)}}_{n \text{ veces}}$$

$$= \underbrace{(1+\rho i)(1+\rho i)\cdots(1+\rho i)}_{n \text{ veces}} + \underbrace{(1-\rho i)(1-\rho i)\cdots(1-\rho i)}_{n \text{ veces}}$$

$$= (1+\rho i)^n + (1-\rho i)^n = \alpha$$

Como $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\alpha = \overline{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ Q.E.D. ∎

P_2

P2) $n \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$.

P.D.Q. $w_0, \dots, w_{n-1}$ son raíces n-ésimas de $1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$

$\boxed{\text{Usar la forma de las raíces n-ésimas}}$

En efecto: Sea $n \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$.

Por definición, las raíces n-ésimas son de la forma $w_k = \sqrt[n]{\cancel{|w|}^{\,1}}\, e^{i\left(\frac{\theta_0 + 2\pi k}{n}\right)}$ $\forall k \in [0..n-1]$

la cual se puede reescribir para explicitar dependencia con k:

$$w_k = \underbrace{\sqrt[n]{\cancel{|w|}^{\,1}}\, e^{i\frac{\theta_0}{n}}}_{=:w_0} e^{i\frac{2\pi k}{n}} \iff w_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \iff w_k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k \quad (\forall k \in [0..n-1])$$

Luego $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k}$ forma de una suma geométrica

Como $n \geq 2 \iff 1 \geq \frac{2}{n} \iff \pi \geq \frac{2\pi}{n} \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1$, así que
$n > 0$

se puede aplicar la suma geométrica:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \cancel{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^0}^{\,1} \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{\cancel{(n-1)+1}\, n} - 1}{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) - 1} = \frac{\cancel{e^{i2\pi}}^{\,1} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = 0 \;//$$

Sigue que $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = w_0 \cdot 0 = 0$ Q.E.D. ∎

De forma similar, para $k \geq 1$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^j\right)^k = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right)^j$$

Como $n \geq 2 \underset{n>0}{\iff} 1 \geq \frac{2}{n} \iff \pi \geq \frac{2\pi}{n} \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1$, así que

se puede aplicar la suma geométrica:

$$= \cancelto{1}{\left(\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right)^0} \frac{\left(\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right)^{(n-\cancel{1})+\cancel{1}} - 1}{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k - 1} = \frac{\left(\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right)^n - 1}{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k - 1}$$

$$= \frac{\cancelto{1}{\left(e^{i\frac{2\pi}{\cancel{n}}}\right)^{k\cancel{n}}} - 1}{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k - 1} = 0 \quad \text{Q.E.D.} \blacksquare$$

P2 b) $m \in [0..n-1]$ exponentes

$p(x) \in \mathbb{C}[x]$ t.q. $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$.

polinomio a coeficientes complejos

P.D.Q. $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} p(w_j) = p(0)$

Usar def. de la forma de p + resultado anterior

En efecto, considérese $w_j = (e^{i\frac{2\pi}{n}})$

Noten que $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} p(w_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k (w_j)^k\right)$

pues son indep

a_k no depende de j

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n-1} a_k (w_j)^k$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k$$

suma anterior

$$= \frac{1}{n}\left(a_0 \sum_{j=0}^{n-1} \cancel{(w_j)^0}^{\,1} + \cancel{\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k}^{\,0}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(a_0\left[(n-1)-0+1\right]\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{n}} a_0 \cancel{n} \; ; \quad \boxed{a_0 = p(0)}$$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} p(w_j) = p(0)$ Q.E.D. ■

P3

P3 a) $z \in \mathbb{C}$. Resolver $z^4 - 5i = 0$

En efecto,

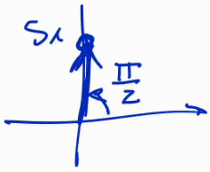
$$z^4 - 5i = 0 \iff z^4 = 5i \quad (*)$$

Escribamos en forma polar:

$* \; z^4 = \left(|z| \cdot e^{i(\arg(z))}\right)^4 = \left(\rho e^{i\theta}\right)^4 = \rho^4 \cdot e^{i4\theta}$

$= |z|^4 \cdot e^{i4\arg(z)}$ … de Moivre

$* \; 5i = |5i| \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$



$= |0 + i5| \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= \sqrt{0^2 + 5^2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$(*) \iff |z|^4 \cdot e^{i4\arg(z)} = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow |z|^4 \cdot e^{i4\arg(z)} = 5 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \quad k \in \{0,1,2,3\}$

prop. (periodicidad)

$\iff |z|^4 = 5 \wedge 4\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \{0,1,2,3\}$

igualdad de $\mathbb{C}$

$\iff |z| = \sqrt[4]{5} \wedge \arg(z) = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} \quad k \in \{0,1,2,3\}$

despejar

$\iff z_k = \sqrt[4]{5} \cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right)}$ $\square$

De forma explícita:

$$\underline{k=0}\quad z_0 = \sqrt[4]{5} \cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+0}{4}\right)}$$

$$= \sqrt[4]{5} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$\underline{k=1}\quad z_1 = \sqrt[4]{5} \cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt[4]{5} \cdot e^{i\frac{5\pi}{8}}$$

$$\underline{k=2}\quad z_{\cancel{1}2} = \sqrt[4]{5} \cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt[4]{5} \cdot e^{i\frac{9\pi}{2}}$$

$$\underline{k=3}\quad z_3 = \sqrt[4]{5} \cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+6\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt[4]{5} \cdot e^{i\frac{13\pi}{4}}$$

P3 b) Propuesta!!! (Las soluciones son $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$)

P4

P4 $\theta \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$

Encontrar soluciones $z \in \mathbb{C}$ de ecuación

$z^n = w$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) = i \sum_{k=0}^{n-1} z^k \operatorname{sen}(-k\theta)$$

Observemos que $0 \leq k \leq n-1$.
Que ambas sumatorias tienen los mismos límites.
La iteración de la suma tiene parecido.

En efecto,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) = i \sum_{k=0}^{n-1} z^k \operatorname{sen}(-k\theta)$$

Restando -

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) - i \sum_{k=0}^{n-1} z^k \operatorname{sen}(-k(\theta)) = 0$$

- $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ (impar) (visto en intro al cálculo)
- Factorizando constante -1

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n-1} z^k \operatorname{sen}(k\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) + z^k \operatorname{sen}(k\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} z^k \underbrace{\left(\cos(k\theta) + \operatorname{sen}(k\theta)\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} z^k \cdot e^{ik\theta} = 0$$

... pues sabemos que $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)$ (visto en clases)

$\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (z\cdot e^{i\theta})^k = 0$ ... de Moivre

$\Leftrightarrow \dfrac{(z\cdot e^{i\theta})^{\cancel{(n-1)+1}} - 1}{z\cdot e^{i\theta} - 1} = 0, \; z e^{i\theta} \neq 1$ ... Geometria Suma

geométrica

$\Leftrightarrow \dfrac{(z\cdot e^{i\theta})^{n} - 1}{z\cdot e^{i\theta} - 1} = 0, \; z e^{i\theta} \neq 1$

$\Leftrightarrow (z\cdot e^{i\theta})^n - 1 = 0, \quad z\cdot e^{i\theta} \neq 1$

$\cdot z e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow (z\cdot e^{i\theta})^n = 1, \quad z\cdot e^{i\theta} \neq 1$

$\Leftrightarrow z\cdot e^{i\theta} = e^{\frac{i2k\pi}{n}}, \; k = 1, \dots, n-1$, se excluye $k=0$
pues $\Rightarrow z e^{i\theta} = 1$ pero $z e^{i\theta} \neq 1$

$\Leftrightarrow z_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right)}, \; k = 1, \dots, n-1.$

Luego, son $n-1$ raíces de la forma z_k. ∎

P5

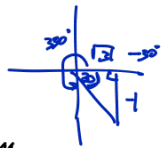
P2 b) Encontrar valores $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$$

Reescribamos términos en su forma polar

- $\frac{\sqrt{3}-i}{2} = re^{i\alpha}$

$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$



$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}-i}{2} = 1\cdot e^{i\frac{-\pi}{6}} = e^{i\frac{11}{6}\pi}$

- $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = se^{i\beta}$

$s = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}+i}{2} = 1\cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

Luego, como $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$ es lo que queremos ver

$$\Leftrightarrow \left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{2n} - \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow e^{-i\frac{2n\pi}{6}} - e^{i2n\frac{\pi}{6}} = i\sqrt{3} \quad \text{... de Moivre}$$

$$\Leftrightarrow e^{-i\frac{n\pi}{3}} - e^{i\frac{n\pi}{3}} = i\sqrt{3}$$

Euler

$$\Rightarrow \left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right) - \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) = i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = i\sqrt{3}$$

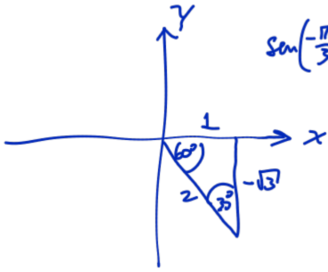
cos es par
sen es impar

$$\Rightarrow \cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)} \boxed{-} i\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)} - i\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow -2i\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = i\sqrt{3} \Rightarrow -2\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Como $-2\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$:

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi + (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{n\pi}{\cancel{3}} = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{\cancel{3}}\right)$$

$$\Rightarrow n = 3k + (-1)^{k+1} \qquad (k \geq 1 \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}).$$

P6

(P1) Encuentre las soluciones de la ecuación

b)

$$w^n = -1 \quad , n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$$

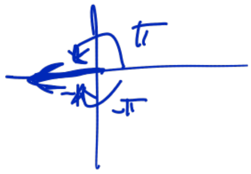
En efecto,

reescribimos con coordenadas polares:

$* \ w^n = \left(|w|\cdot e^{i\arg(w)}\right)^n$

$= |w|^n \cdot e^{in\arg(w)}$ ... de Moivre

$* \ -1 = |-1|\cdot e^{i\arg(-1)}$



$= |-1+i0|\cdot e^{i\arg(-1)}$

$= \sqrt{(-1)^2+0^2}\cdot e^{i\pi}$

$= 1\cdot e^{i\pi}$

Así, $w^n = -1 \iff |w|^n \cdot e^{in\arg(w)} = 1\cdot e^{i\pi}$

$\iff |w|^n \cdot e^{in\arg(w)} = 1 \cdot e^{i(\pi+2k\pi)} \quad , k = 0, \ldots, n-1$

$\iff |w|^n = 1 \ \wedge \ n\arg(w) = \pi + 2k\pi \ , \quad k = 0, \ldots, n-1$

$\sqrt[n]{\ }$

$\iff |w| = \underbrace{\sqrt[n]{1}}_{1} \ \wedge \ \arg(w) = \dfrac{\pi + 2k\pi}{n} \ , \quad k = 0, \ldots, n-1$

$\iff w_k = \sqrt[n]{1}\cdot e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2}} \ , \quad k = 0, \ldots, n-1$

$\iff w_k = 1\cdot e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)} \ , \quad k = 0, \ldots, n-1$

$\iff w_k = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)} \ , \quad k = 0, \ldots, n-1$ ■

P1 b) II) Considerar $z \in \mathbb{C}$ t.q. $|z|=1$ $z \neq -1$
Resolver usando i) $\left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right)^n = -1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Vimos que $w^n = -1 \Leftrightarrow w_k = e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right)}$ para $w \in \mathbb{C}$

Sea $w = \frac{1+z}{1+\bar{z}}$, como $\bar{z} \neq -1$

$$\Rightarrow w(1+\bar{z}) = 1+z$$

$$\Rightarrow w + w\bar{z} = 1+z \quad / \cdot z$$

$$\Rightarrow z(w+w\bar{z}) = z(1+z)$$

$$\Rightarrow zw + zw\bar{z} = z + z^2$$

$$\Rightarrow zw + \underbrace{|z|^2}_{1} w = z + z^2$$

$$\Rightarrow zw + w = z + z^2$$

$$\Rightarrow w(z+1) = z(z+1)$$, como $\bar{z} \neq 1 \Rightarrow z \neq 1$ (pues $Re(\bar{z}) = Re(z)$)

$$\Rightarrow w = z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right)^n = z^n = -1$$

$$\Rightarrow z_k = e^{i\frac{2k\pi + \pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

P7

PROPUESTA !!

Hint: escribir en forma polar y resolver!

P8

Solo resolveremos 1 . . .

El resto es análogo!

En el próximo aux veremos que hay otras técnicas de división

P8 a) Dividir $27x^3+9x^2-3x-9$ por $3x-2$

En efecto:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 27x^3+9x^2-3x-9 & 3x-2 \\ \cline{3-3}
- & (27x^3-18x^2) & 9x^2+9x-5 \;\cdots\; 1 \\ \cline{2-2}
 & 0 + 27x^2-3x-9 & \\
- & (27x^2-18x) & \\ \cline{2-2}
 & -15x-9 & \\
- & (-15x-10) & \\ \cline{2-2}
 & 1 &
\end{array}$$

$$\therefore \frac{27x^3+9x^2-3x-9}{3} = 9x^2+9x-5 \;\cdots\; 1 \qquad \blacksquare$$

En esta auxiliar aprendimos que hay ecuaciones en $\mathbb{C}$, y que la forma polar es útil para resolverlas.

(Y en general, el procedimiento siempre es el mismo!.)

Esto es algo muy interesante de $\mathbb{C}$.

Siempre atenta a sus dudas,

Bianca.

P.D. Éxito en su estudio !!

Cherry Pie
Fazerdaze