DESARROLLO AUX 12

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS Y NÚMEROS COMPLEJOS

MA1101-5
2025-1

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

P1 $\begin{cases} *: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad (x,y) \mapsto x*y = \sqrt[3]{x^3+y^3} \end{cases}$ l.c.i. en $\mathbb{R}$

P1 a) P.D.Q. $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es cuerpo

R Comprobarlo por caracterización

Veremos $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es cuerpo

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (\mathbb{R}, *) \text{ es grupo abeliano} \\ \wedge\ (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot) \text{ es grupo abeliano} \\ \wedge\ \cdot \text{ distribuye c/r } * \end{cases}$

resultado del curso

$\begin{cases} (i)\ * \text{ asocia} \\ (ii)\ * \text{ conmuta } (\leftarrow \text{abeliano}) \\ (iii)\ * \text{ admite neutro (hay que exhibirlo)} \\ (iv)\ * \text{ admite inverso para todo elemento} \end{cases}$

I) $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano

(i) $*$ asocia: $(\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}): x*(y*z) = (x*y)*z$

En efecto,

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Luego

$$\begin{aligned}
x*(y*z) &\overset{\text{def. }*}{=} x*\left(\sqrt[3]{y^3+z^3}\right) \\
&\overset{\text{def. }*}{=} \sqrt[3]{x^3+\left(\sqrt[3]{y^3+z^3}\right)^3} \\
&\overset{(\sqrt[3]{\cdot})^3 = Id}{=} \sqrt[3]{x^3+(y^3+z^3)} \\
&\overset{+\text{ asocia}}{=} \sqrt[3]{(x^3+y^3)+z^3} \\
&\overset{Id = (\sqrt[3]{\cdot})^3}{=} \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)^3+z^3} \\
&\overset{\text{def. }*}{=} \sqrt[3]{(x*y)^3+z^3} \overset{\text{def. }*}{=} (x*y)*z \,/\!/
\end{aligned}$$

Por transitividad, $x*(y*z) = (x*y)*z$

(ii) $*$ conmuta: $(\forall x,y\in\mathbb{R}): x*y=y*x$

En efecto,

Sean $x,y\in\mathbb{R}$.

Luego $x*y \underset{\text{def. }*}{=} \sqrt[3]{x^3+y^3} \underset{+\text{ conmuta}}{=} \sqrt[3]{y^3+x^3} \underset{\text{def. }*}{=} y*x$ //

Por transitividad, $x*y=y*x$ □

(iii) $*$ admite neutro: $(\exists e\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}): e*x=x=x*e$

neutro. hay que exhibir su valor.

En efecto,

Se tomará $e\in\mathbb{R}$ t.q. $e=0$.

Esto pues (para $x\in\mathbb{R}$) $e*x \underset{\text{def. }*}{=} \sqrt[3]{e^3+x^3} \underset{e=0}{=} \sqrt[3]{0+x^3} \underset{0\text{ neutro de }+}{=} \sqrt[3]{x^3} \underset{\sqrt[3]{(\cdot)^3}=Id}{=} x$ //

Se tiene $x*e$ pues $*$ conmuta.

Sigue que $e=0\in\mathbb{R}$ es elemento neutro de $*$. □

(iv) $*$ admite inverso: $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x*y=0=y*x$

inverso. hay que describir su forma

En efecto,

Sea $x\in\mathbb{R}$. Se tomará $y\in\mathbb{R}$ t.q. $y=-x$

Esto pues $x*y \underset{\text{def. }*}{=} \sqrt[3]{x^3+y^3} \underset{y=-x}{=} \sqrt[3]{x^3+(-x)^3} \underset{\text{prop. }(\cdot)^n}{=} \sqrt[3]{x^3+(-1)^3x^3} \underset{(-1)^3=-1}{=} \sqrt[3]{x^3-x^3} \underset{\text{inverso aditivo}}{=} 0$ //

Se tiene $y*x$ pues $*$ conmuta.

Sigue que $y=-x$ es inverso de x por $*$. □

—o—

En virtud de (i), (ii), (iii), (iv), se concluye que $(\mathbb{R},*)$ es grupo abeliano □

II) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ es grupo abeliano

Se tiene, por ser resultado conocido

(en un control sería bueno preguntar si se espera que se muestre o no).

III) • distribuye c/r $*$

P.D.Q. $(\forall x,y,z\in\mathbb{R}): x\cdot(y*z)=(x\cdot y)*(x\cdot z)$

En efecto,

Sean $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Luego
$$
\begin{aligned}
x\cdot(y*z) &\underset{\text{def. }*}{=} x\cdot\sqrt[3]{y^3+z^3}\\
&\underset{\text{factoriza}}{=} \sqrt[3]{x^3\cdot(y^3+z^3)}\\
&\underset{\text{distr. de }\cdot\text{ c/r }+}{=} \sqrt[3]{x^3\cdot y^3+x^3\cdot z^3}\\
&\underset{\text{prop. }(\,)^{\circ}}{=} \sqrt[3]{(x\cdot y)^3+(x\cdot z)^3}\\
&\underset{\text{def. }*}{=} (x\cdot y)*(x\cdot z) \;//
\end{aligned}
$$

Por transitividad, $x\cdot(y*z)=(x\cdot y)*(x\cdot z)$ $\square$

— o —

En virtud de I), II), III), se tiene que $(\mathbb{R},*,\cdot)$ es grupo abeliano. Q.E.D. $\blacksquare$

(P1) g) P.D.Q. $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=x^3 \end{cases}$ es $\underbrace{\overbrace{\text{isomorfismo}}^{\text{"igual" "forma"}}}_{\text{biyectiva}}$ de $\underbrace{(\mathbb{R},*,\cdot)\text{ en }(\mathbb{R},+,\cdot)}$

$\underbrace{\text{biyectiva}}_{\text{"igual"}}$ $\quad \underbrace{\begin{matrix} * \; f(x*y)=f(x)+f(y) \\ * \; f(x\cdot y)=f(x)f(y)\end{matrix}}_{\text{"forma"}}$

En efecto,

I) f es biyectiva

II) (i) P.D.Q. $(\forall x,y\in\mathbb{R}): f(x*y)=f(x)+f(y)$

Sean $x,y\in\mathbb{R}$.

Luego $f(x*y)\underset{\text{def. }*}{=} f\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)\underset{\text{def. }f}{=}\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)^3\underset{(\sqrt[3]{\cdot})^3}{=} x^3+y^3\underset{\text{def. }f}{=} f(x)+f(y)$ //

Por transitividad se concluye que $f(x*y)=f(x)+f(y)$. $\square$

(ii) P.D.Q. $(\forall x,y\in\mathbb{R}): f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$

Sean $x,y\in\mathbb{R}$,

Luego $f(x\cdot y)\underset{\text{def. }f}{=}(x\cdot y)^3\underset{\text{prop. CS}}{=}x^3\cdot y^3\underset{\text{def. }f}{=}f(x)\cdot f(y)$ //

Por transitividad se concluye que $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$. $\square$

En virtud de I), II), se concluye que f es isomorfismo. $\blacksquare$

P_2

P2) Expresar de forma cartesiana $(1-i)^4(1+i)^4$

a)

En efecto:

$$*\ (1-i)^4(1+i)^4 \underset{\text{prop. }(\cdot)^a}{=} \left[(1-i)(1+i)\right]^4$$

Hay suma por su diferencia

$$= \left[1-i^2\right]^4 \quad ; \; i^2=-1 \;\; (i:=\sqrt{-1})$$

$+$ por $-$

$$= \left[1-(-1)\right]^4$$

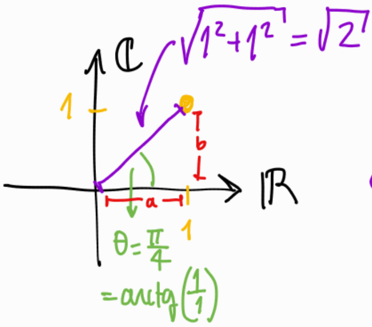
$$= \left[1+1\right]^4$$

$$= 2^4 = 16 \,//$$

$$\Rightarrow (1-i)^4(1+i)^4 = 16+i0 \;\blacksquare$$

Otra forma: con representación polar

Notar que $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ pues:

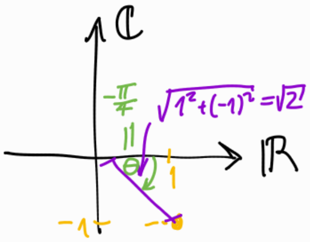


1º ubico (x, y), con $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{C}$

2º Calculo módulo $\sqrt{x^2+y^2}$

3º calculo ángulo $\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

También $1-i = \sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ pues:



Luego: $(1-i)^4(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4\left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = (\sqrt{2})^4\, \underbrace{e^{i\frac{\pi}{\cancel{4}}\cancel{4}}}\,(\sqrt{2})^4\,\underbrace{e^{-i\frac{\pi}{\cancel{4}}\cancel{4}}}$; $\underbrace{e^{-\alpha}e^{\alpha}=1}$ $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$, $\alpha=\pi$

$$= 2^2\cdot 2^2 = 16 = 16+i0 \;\blacksquare$$

P_3

P2 b) Expresar de forma cartesiana $1+i+\dfrac{i-1}{|1-i|^2+i}$

Está "tó" en la forma cartesiana. Basta desarrollar más.

$\boxed{|z| \in \mathbb{R} \ (\forall z \in \mathbb{C})}$ $\longrightarrow$ $|1-i|^2$ es un número! es $(\sqrt{2})^2$

Se puede obtener por def: $\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$

En efecto:

$$1+i+\frac{i-1}{|1-i|^2+i} = 1+i+\frac{i-1}{2+i} = 1+i+\frac{i-1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$$

para generar suma por dif.

$$= 1+i+\frac{-(1-i)(2-i)}{2^2-i^2}$$

$$= 1+i+\frac{-(2-i3+i^2)}{4-(-1)}$$

$$= 1+i+\frac{-2+i3+1}{5}$$

$$= 1+i+\frac{-1}{5}+i\frac{3}{5}$$

operaciones entre fracciones

$$= \frac{4}{5}+i\frac{8}{5}$$

■

P4

P3

P.D.Q. $(\forall z\in\mathbb{C}): z\neq -1 \wedge |z|=1 \Rightarrow \dfrac{1+z}{1-\overline{z}} = z$

En efecto,

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2 \ (\forall z\in\mathbb{C})}$$

Sea $z\in\mathbb{C}$ t.q. $z\neq -1$ y $|z|=1$

Luego $$\frac{1+z}{1+\overline{z}} = \frac{1+z}{1+\overline{z}}\cdot\frac{z}{z} = \frac{z+z^2}{z+\underbrace{|z|^2}_{=1}} = \frac{z\cancel{(1+z)}}{\cancel{z+1}} = z$$. Q.E.D. $\blacksquare$

(P4) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(P4 a) P.D.Q. $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \in \mathbb{R}$

$(\forall z \in \mathbb{C}): z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

En efecto,

Notar que $\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2$ i.e. los sumandos son conjugados, y por propiedad se tiene que $\boxed{(\forall z \in \mathbb{C}): z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)}$, por lo que al aplicarla en este caso: $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \in \mathbb{R}$ Q.E.D.

(P4 b) P.D.Q. $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$

* $(\forall z \in \mathbb{C}): \mathrm{Re}(z) \leq |z|$
* $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}): |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
* $(\forall z \in \mathbb{C}): |\overline{z}| = |z|$

Notar que
$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1\overline{z_2}|$$
$$= 2|z_1||z_2|$$
$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2. \text{ Q.E.D.}$$

módulo de directo y de conjugado coinciden

$2ab \leq a^2 + b^2 \ (\forall a, b \in \mathbb{R})$

Ps

P5

a) $z \in \mathbb{C}$ t.q. $|z+1| = |z|$

P.D.Q. $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$

En efecto,

Como $|z+1| = |z|$ $\quad /(\,)^2$

$$\Rightarrow |z+1|^2 = |z|^2$$

$$\Leftrightarrow (z+1)\overline{(z+1)} = |z|^2$$

$$\Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}+1) = |z|^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{|z|^2} + z + \bar{z} + 1 = \cancel{|z|^2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{z + \bar{z}}_{=2\mathrm{Re}(z)} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}.$$ Q.E.D. ■

P5

b) $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$(z+1)^n + z^n = 0$

P.D.Q. $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$

En efecto,

Como $(z+1)^n + z^n = 0$

$$\Leftrightarrow (z+1)^n = -z^n$$

$$\underset{|\cdot|}{\Rightarrow} |(z+1)^n| = |-z^n|$$

$$\Rightarrow |z+1|^n = |z|^n$$

$$\Rightarrow |z+1| = |z|$$

$$\underset{\text{parte anterior}}{\Rightarrow} \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$$ Q.E.D. ■

P6

(P0) $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

(P6) a) P.D.Q. $\dfrac{z}{\bar{z}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0 \vee \mathrm{Im}(z)=0$

Sea $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \Rightarrow z = a+ib$, con $a,b \neq 0$

En efecto,

Como $z=a+ib \Rightarrow \dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{a+ib}{a-ib}\cdot\dfrac{a+ib}{a+ib}$

Primero caracterizar la forma del complejo

$$= \frac{(a+ib)^2}{a^2-i^2b^2}$$

$$= \frac{(a+ib)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-i2ab+i^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - i\frac{2ab}{a^2+b^2} //$$

Por doble implicancia,

$\Rightarrow)$ Sea $\dfrac{z}{\bar{z}} \in \mathbb{R}$, P.D.Q. $\mathrm{Re}(z)=0 \vee \mathrm{Im}(z)=0$

En efecto,

Si $\dfrac{z}{\bar{z}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)=0 \Rightarrow \dfrac{2ab}{a^2+b^2}=0 \Rightarrow ab=0 \Rightarrow \underbrace{a}_{=\mathrm{Re}(z)}=0 \vee \underbrace{b}_{=\mathrm{Im}(z)}=0$ $\square$

$\Leftarrow)$ Si $\mathrm{Re}(z)=0 \vee \mathrm{Im}(z)=0$, Ver que $\dfrac{z}{\bar{z}} \in \mathbb{R}$

Asumiendo hipótesis: $\mathrm{Re}(z)=0 \vee \mathrm{Im}(z)=0$

$$\Rightarrow z=ib \vee z=a$$

$$\Rightarrow \bar{z}=-ib \vee \bar{z}=a$$

$$\Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} = \frac{ib}{-ib} = -1 \in \mathbb{R} \vee \frac{z}{\bar{z}} = \frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{R}. \square$$

En virtud de lo anterior se entrega lo pedido. $\blacksquare$

P6) $z \in \mathbb{C}$. P.D.Q. $|z-i| = |z-1| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$

Sea $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a+ib$.

En efecto,

Por doble implicancia:

$\Rightarrow)$ $|z-i| = |z-1| \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$

Como $|z-i| = |z-1|$

$$\Leftrightarrow |a+ib-i| = |a+ib-1|$$

$$\Leftrightarrow |a+i(b-1)| = |a-1+ib|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-1)^2} = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$$

$$\overset{()^2}{\Rightarrow} a^2+(b-1)^2 = (a-1)^2+b^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a^2}+\cancel{b^2}-2b\cancel{+1} = \cancel{a^2}-2a\cancel{+1}+\cancel{b^2}$$

$$\Leftrightarrow b=a \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z) \quad \square$$

$\Leftarrow)$ $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$. P.D.Q. $|z-i| = |z-1|$

Como $z = a+ib$, por hipótesis, $z = a+ia$

$$\Rightarrow z-i = a+i(a-1)$$

$$\Rightarrow |z-i| = |a+i(a-1)| = \sqrt{a^2+(a-1)^2}$$

$$\Rightarrow |z-1| = |(a-1)+ia| = \sqrt{(a-1)^2+a^2}$$

$$\therefore |z-i| = |z-1| \quad \blacksquare$$

P7

P7

$|z_i|^2 = 1^2 = 1$; gracias por tu tiempo :)

$z_1, z_2, \dots, z_p \in \mathbb{C}$ t.q. $|z_i| = 1$ $(\forall i \in [1..p])$

P.D.Q. $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} z_i = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{z_i} = a$

Calcular $\displaystyle\sum \frac{1}{z_i}$ con $\frac{1}{z_i}$ convertido

Notar que $\displaystyle\frac{1}{z_i} = \frac{1}{z_i} \cdot \frac{\overline{z_i}}{\overline{z_i}} = \frac{\overline{z_i}}{\cancel{|z_i|^2}_{1}} = \overline{z_i}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{z_i} = \sum_{i=1}^{p} \overline{z_i} = \overline{\sum_{i=1}^{p} z_i} = \overline{a} = a \in \mathbb{R}$$

$a \in \mathbb{R}$

PB

PROPUESTA =

complejo...

En este auxiliar vimos una pincelada de Estructuras Algebraicas (**), y el comienzo de números Complejos.

Los números complejos tienen una estructura para almacenar la información de forma útil!!

Durante Plan Común, los verás constantemente

También aprendimos que suele ser útil multiplicar por el conjugado, cuando queremos manipular una expresión, entre otras cosas.

Quedo atenta a dudas!!

Saludos

(**) Es una materia muy bonita! Si a alguien le interesa más, puede tomar el curso "Elementos del Álgebra (MA3101)" cuando hayan aprobado Cálculo en Varias Variables (MA2001), en otoño.

Hawaii

Happy Hollows