Auxiliar 12

Estructuras algebraicas y números complejos

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 16 de junio de 2025

P1. [Composición]
Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ definida por $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

a) Pruebe que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es un cuerpo.
b) Demuestre que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es un isomorfismo de $(R, *, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

P2. [Primeros pasos]

a) Expresar de la forma $a + ib$ los siguientes complejos: $(1-i)^4(1+i)^4$ y $1 + i + \dfrac{i-1}{|1-i|^2 + i}$.

P3. [Escritura]
Demuestre para todo $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq -1$ y $|z| = 1$, se tiene que $\dfrac{1+z}{1+\overline{z}} = z$.

P4. [Desigualdad]
Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que **a)** $(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) \in \mathbb{R}$ y que **b)** $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$.

P5. [La mitad]

a) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z+1| = |z|$. Demuestre que $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = -\dfrac{1}{2}$.
b) Sean $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tal que $(z+1)^n + z^n = 0$. Demuestre que $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = -\dfrac{1}{2}$.

P6. [Parte real e imaginaria]

a) Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demuestre que $\dfrac{z}{\overline{z}} \in \mathbb{R} \iff \mathbb{R}\mathrm{e}(z) = 0$ ó $\mathbb{I}\mathrm{m}(z) = 0$.
b) Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que $|z - i| = |z - 1| \iff \mathbb{R}\mathrm{e}(z) = \mathbb{I}\mathrm{m}(z)$.

P7. [Suma]

Sean $z_1, z_2, \ldots . z_p \in \mathbb{C}$ tales que $|z_i| = 1$ ($\forall\, i \in [1..p]$). Demuestre que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i = a \in \mathbb{R}$ entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i} = a$.

P8. [Fusión]

a) Se define $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Demuestre que $(S, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
b) Para $z \in S$, $z \neq 1$, se define $w = \dfrac{1+z}{1-z}$. Demuestre que $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Ley de composición interna]**: Es una operación que tiene clausura en un conjunto. Sea $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Entonces una ley de composición interna $*$ satisface que $(\forall\, x, y \in \mathbb{A}) : x * y \in \mathbb{A}$.
- **[Estructura algebraica]**: Corresponde a un conjunto dotado de una ley de composición interna definida sobre él, tal que admite a lo más un elemento neutro.
- **[Grupo (abeliano)]**: Una estructura algebraica $(\mathbb{A}, *)$ es un grupo (abeliano) si y solo si $*$ asocia, $*$ admite neutro en $\mathbb{A}$, todo elemento es invertible (y $*$ conmuta).
- **[Cuerpo]**: $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es cuerpo si y solo si $(\mathbb{K}, +)$ es grupo abeliano, $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano, $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
- **[Morfismos]**: Corresponde a una función entre dos estructuras algebraicas que preserva las operaciones en cada una. Sean $(\mathbb{A}, *)$, $(\mathbb{B}, \Delta)$ estructuras algebraicas y $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ función. f es morfismo entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ si y solo si $f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$ $(\forall\, x, y \in \mathbb{A})$. Si f es inyectiva, epiyectiva o biyectiva, se denomina **monomorfismo**, **epimorfismo** o **isomorfismo**, respectivamente. Si f se define desde y hasta la misma estructura algebraica, se llama **endomorfismo**, y si es además inyectiva, se denomina **automorfismo**.

Principales definiciones y propiedades

- **[Cuerpo de los complejos]**: Corresponde al conjunto $\mathbb{C} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$, que también se puede escribir como $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Posee la estructura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, tal que para $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$ en $\mathbb{C}$:
  - $z + w = (a + c, b + d)$
  - $z \cdot w = (ac - bd, ad + bc)$
- **[Unidad imaginaria]**: Se denota a $i := \sqrt{-1} \in \mathbb{I}$ con $i^2 = 1$; también se representa por $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$.

  Se cumple que $i^n = \begin{cases} +1, & n \equiv_4 0 \\ +i, & n \equiv_4 1 \\ -1, & n \equiv_4 2 \\ -i, & n \equiv_4 3 \end{cases}$
- **[Representaciones de un número complejo]**: Un número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ se puede representar de forma **cartesiana** o **forma polar**.
  - **[Representación cartesiana]**: Se escribe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, donde $a =: \mathbb{R}\text{e}(z)$ se denomina **parte real** y $b =: \mathbb{I}\text{m}$ se denomina **parte imaginaria**. Esta escritura suele ser cómoda para sumar.
    - $\mathbb{R}\mathbf{e}(z \pm w) = \mathbb{R}\mathbf{e}(z) \pm \mathbb{R}\mathbf{e}(w)$
    - $\mathbb{I}\mathbf{m}(z \pm w) = \mathbb{I}\mathbf{m}(z) \pm \mathbb{I}\mathbf{m}(w)$
    - $\mathbb{R}\mathbf{e}(\beta z) = \beta \mathbb{R}\mathbf{e}(z)$
    - $\mathbb{I}\mathbf{m}(\beta z) = \beta \mathbb{I}\mathbf{m}(z)$
    - Dos complejos son iguales si y sólo si coinciden en parte real y en parte imaginaria (igualdad de 2-tuplas).
  - **[Representación polar]**: Se escribe $z = \rho e^{i\theta}$ donde $\rho \equiv |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ se denomina **módulo** y $\theta \equiv \arg(z) := \textbf{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \in [0, 2\pi)$ y se denomina **argumento**. Esta escritura suele ser cómoda para productos y cálculo de inversos.
    - $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ $(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$
    - $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \bmod 2\pi$
    - $\arg(z^k) = k \cdot \arg(z) \bmod 2\pi$
    - **[Fórmula de Moivre]**: $\left(e^{i\theta}\right)^k = e^{i(k\theta)}$
    - $\arg(\overline{z}) + \arg(z) = 2\pi$
    - $z^{-1} = \left(\frac{1}{|z|}\right) e^{i\arg(z)} = \left(\frac{1}{|z|}\right) e^{-i\arg(z)}$
    - $e^{in\theta} = e^{i\theta_0} \iff n\theta = \theta_0 \ \mathbf{mod}\ 2\pi$
      $\iff (\exists\, k \in \mathbb{Z}) : n\theta = \theta_0 + 2k\pi$
      $\iff (\exists\, k \in \mathbb{Z}) : \theta = \dfrac{\theta_0 + 2k\pi}{n}$

  La relación entre ambas representaciones está dada por la identidad de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Así:

  $$a + ib = \rho e^{i\theta} \iff a + ib = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)$$

  O sea que $a = \rho\cos(\theta)$ y $b = \rho\sin(\theta)$.
- **[Propiedades de números complejos]**: Sean $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{C}$ con $|z| = r$ y $|w| = s$. Entonces:
  - **[Potencias]:** Para $k \in \mathbb{Z}$
    - $z^0 = 1$
    - $z^{k+1} = z^k \cdot z$, si $k \geq 0$
    - $\left(z^{-1}\right)^{-k} = z^k$ si $k < 0$
  - **[Módulo]**
    - $|z| \geq 0 \wedge |z| = 0 \iff z = (0, 0)$
    - $|z| \geq |\mathbb{R}\text{e}(z)$ y $|z| \geq \mathbb{I}\text{m}(z)$
    - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
    - $|z^k| = |z|^k$, $k \in \mathbb{Z}$
    - $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, si $w \neq (0, 0)$
    - $|z + w| \leq |z| + |w|$
  - **[Conjugado]**:
    - $z = a + ib \iff \overline{z} = a - ib$
    - $\overline{\overline{z}} = z$
    - $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$
    - $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$
    - $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
    - $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$
    - $z + \overline{z} = 2\mathbb{R}\text{e}(z) = 2\mathbb{R}\text{e}(\overline{z})$
    - $z - \overline{z} = 2\mathbb{I}\text{m}(z) = 2\mathbb{I}\text{m}(\overline{z})$
    - $|\overline{z}| = |z|$
    - $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
    - $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, $z \neq (0, 0)$