Auxiliar 10

Conjuntos finitos (y particiones)

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 2 de junio de 2025

P1. [Separados]
Sean A, B, C conjuntos finitos tales que $A \cap C = \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ y $|B| = |C|$. Demuestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$.

P2. [Multiplicados]
Sean A, B conjuntos finitos no vacíos. Demuestre que $|A \times B| = |B \times A|$.

P3. [Potencias]
Demuestre sin usar inducción que, dados $j, n \in \mathbb{N}$, si $j < n$, entonces se cumple que $n^j \leq 2^{nj}$.

P4. [Diccinoario]
La palabra más larga que aparece en el diccionario es *electroencefalografista*. Demuestre que el número total de palabras (con sentido) que existen es una cantidad finita.

P5. [Cardinal de la unión]
Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos.

a) Demuestre que $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

b) Demuestre que $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ si y solo si para todo $i, j \in [1..n], i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

P6. [Particiones]
Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto finito A,

a) Demuestre que $|A| = \sum_{C \in \mathcal{C}} |C|$.

b) Si para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $|X| = |Y|$, demuestre que $|\mathcal{C}|$ divide a $|A|$.

P7. [Contando]
Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$. Demuestre que:

a) $\left|\left\{2i+1 \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{1, \ldots, m\}\right\}\right| = 2^{m-1}$.

b) $\left|\left\{\frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N}, n \in \{9, 10\}, 0 \leq i < 2^{n-1}\right\}\right| = 2^9 + 2^8$ y $\left|\left\{\frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N}, n \in [1..m], 0 \leq i < 2^{n-1}\right\}\right| = 2^m - 1$.

U. DE CHILE
INGENIERIA

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

P8. [Reminiscencia]

Para cada $c \in \mathbb{R}$ se define el conjunto $A_c = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + 5y = c\}$.

Demuestre que $\mathcal{A} = \{A_c \mid c \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Conjunto finito]**: A es un conjunto finito si y sólo si $(\exists n \in \mathbb{N}) : \exists\, f\colon A \to [1..n]$ biyección.
- **[Numeración]**: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una numeración de A si y sólo si son distintos entre sí y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
- **[Cardinalidad de un conjunto finito]**: Sea A un conjunto finito. Se denomina cardinal de A al único natural n para el que existe una numeración $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de A, y se denota $|A| = n$.
  - $|\emptyset| = 0$
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - $B \subseteq A \implies |B| \leq |A|$
  - $B \subseteq A \implies |A \setminus B| = |A| - |B|$
  - $|A| = |B| \iff \exists f\colon A \to B$biyección
  - $|A \times B| = |A||B|$. Si A finito, $|A^n| = |A|^n$.
  - $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- **[Partición de conjuntos]**: $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es una partición de A si las siguientes tres condiciones se cumplen:
  - que ningún elemento de $\mathcal{C}$ es no vacío (cada elemento tiene algo).
  - los elementos de $\mathcal{C}$ son disjuntos de a pares.
  - $\mathcal{C}$ cubre A.