UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
MA1101-5 INTRO. AL ÁLGEBRA · OTOÑO 2025

U. DE CHILE
INGENIERIA

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 11

Conjuntos numerables

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 9 de junio de 2025

P1. [Numerables]
El objetivo de este problema es demostrar que cada uno de los conjuntos definidos son numerables.

a) $\mathbb{A} = \left\{ r + s\sqrt{5} \mid r, s \in \mathbb{Q} \right\}$.

b) $\mathcal{J} = \{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(0) = 0 \wedge (\exists\, d \in \mathbb{N})\,(\forall\, n \in \mathbb{N}) : f(n+1) = f(n) + d \}$.

c) $\mathbb{M} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (\exists\, k \in \mathbb{Z})\,(\exists\, i \in \mathbb{N}) : x = \dfrac{k}{3^i} \right\}$.

P2. [Extracción]
Sea $(f_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $\mathbb{B} = \{ f_n(a) \mid n \in \mathbb{N}, a \in A \}$. Demuestre que si A es numerable, entonces $\mathbb{B}$ también lo es.

P3. [Igualdad]
Considere el conjunto $A \neq \emptyset$. Se define $\mathcal{F} = \{ f\colon \{1,2,3\} \to A \mid f \text{ es función} \}$.

a) Demuestre que $|\mathcal{F}| = |A^3|$. Le puede ser de utilidad considerar para $f \in \mathcal{F}$ la tupla $(f(1), f(2), f(3))$.

b) Demuestre que si A es numerable, entonces $\mathcal{F}$ también lo es.

P4. [Otra igualdad]
Demuestre que el cardinal de los números racionales es igual al cardinal de los números racionales contenidos en el intervalo $[0, 1]$.

P5. [Consecuencias]

a) Sean A y B conjuntos tales que $A \cup B$ es numerable. Demuestre que A es numerable o B es numerable.

b) Sean C y D subconjuntos de $\mathbb{R}$, donde C es finito con $|C| \geq 2$ y D es numerable.
Demuestre que el conjunto $\{ c \times d \mid c \in C, d \in D \}$ es numerable.

c) Decida si la siguiente proposición es verdadera o falsa: si A y B son numerables, entonces $A \cap B$ es numerable.

P6. [Creatividad]

a) Demuestre que el conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable.

b) Un insecto debe cubrir, saltando, la distancia de 0 a 1 avanzando de izquierda a derecha. En cada punto en que se encuentre, puede elegir saltar hasta 1, y completar el recorrido, o avanzar la mitad del tramo restante. Probar que, para cubrir la distancia (entre 0 y 1), se requiere a lo más una cantidad numerable de saltos.

Principales definiciones y propiedades

- **[Conjunto finito]**: A es un conjunto finito si y sólo si $(\exists n \in \mathbb{N}) : \exists\, f\colon A \to [1..n]$ biyección.
- **[Numeración]**: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una numeración de A si y sólo si son distintos entre sí y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
- **[Cardinalidad de un conjunto finito]**: Sea A un conjunto finito. Se denomina cardinal de A al único natural n para el que existe una numeración $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de A, y se denota $|A| = n$.
  - $|\emptyset| = 0$
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - $B \subseteq A \implies |B| \leq |A|$
  - $B \subseteq A \implies |A \setminus B| = |A| - |B|$
  - $|A| = |B| \iff \exists f\colon A \to B$biyección
  - $|A \times B| = |A||B|$. Si A finito, $|A^n| = |A|^n$.
  - $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- **[Conjunto infinito]**: Corresponde a un conjunto que no es finito.
- **[Relaciones entre cardinales]**: Se definen las siguientes nociones de cardinalidad para cualquier tipo de conjunto (i.e. es consistente con la definición para conjuntos finitos y se extiende para conjuntos no finitos).
  - **[Menor o igual cardinal]**:
    $|A| \leq |B| \iff \exists\, f\colon A \to B$ inyectiva
    $\iff \exists\, f\colon B \to A$ epiyectiva.
  - **[Igual cardinal]**:
    $|A| = |B| \iff \exists\, f\colon A \to B$ biyectiva.
  - **[Cardinal menor estricto]**:
    $|A| < |B| \iff |A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$.
- **[Propiedades de $|\cdot|$]**: Las siguientes son propiedades de la cardinalidad de cualesquiera conjunto (i.e. finitos y no finitos).
  - $|\emptyset| = 0$
  - $|A| \leq |A|$
  - $B \subseteq A \implies |A| \leq |B|$
  - $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \implies |A| \leq |C|$
  - **[Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder]:** $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \iff |A| = |B|$
  - **[Cardinal de la imagen]:** Si $f\colon A \to B$ es función, entonces $|f(A)| \leq |A|$.
  - **[Perturbación de un conjunto infinito por uno finito]:** Si A es infinito y B finito, entonces $|A \cup B| = |A| = |A \setminus B|$.
- **[Conjuntos numerables]**: Corresponden a conjuntos que tienen la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$.
  - Todo conjunto infinito A con $|A| \leq |\mathbb{N}|$ es numerable.
  - **[Unión finita de numerables]:** La unión finita de numerables es numerable.
  - **[Unión numerable de numerables]:** La unión numerable de numerables es numerable.
  - **[Unión finita o numerable de finitos o numerables]:** La unión de una familia finita o numerable de conjuntos finitos o numerables es finita o numerable: $(A_i)_{i \in I}, I \subseteq \mathbb{N}$ y $|A_i| \leq |N|N$ para todo $i \in I$, entonces $|\cup_{i \in I} A_i| \leq |\mathbb{N}|$.
  - **[Producto cartesiano finito de numerables]:** El producto cartesiano finito de numerables es numerable.
- **[Cardinalidades conocidas]**:
  - $\mathbb{N}$ es infinito numerable.
    - Más aún, el cardinal de $\mathbb{N}$ corresponde al menor cardinal infinito.
      Si A es un conjunto infinito cualquiera, entonces para todo $a_1 \in A$ y para todo $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, se cumple que:
      (i) A tiene un subconjunto finito B_k de cardinal k con $a_1 \in B_k$.
      (ii) A tiene un subconjunto numerable H, con $a_1 \in H$; en particular $|A| \geq |\mathbb{N}|$.
  - $\mathbb{Z}$ es infinito numerable.
  - $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito numerable.
  - $\mathbb{Q}$ es infinito numerable.