# DESARROLLO AUX 11

## CARDINALIDAD DE CONJUNTOS

MA1101-5
2025-1

**Profesora:** Hanne Van Den Bosch
**Auxiliar:** Bianca Zamora Araya

# Técnicas de demostración que nos serán útiles !!

Para ver que un conjunto $A$ es numerable:

* exhibir biyección del conjunto con $\mathbb{N}$.
  ↳ o con cualquier conjunto numerable.

* por Cantor-Bernstein-Schröder (C-B-S):
  ↳ exhibir 2 inyecciones: $|A| \leq |\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{N}| \leq |A|$.
  ↳ ver que $A$ es finito ($|A| \leq |\mathbb{N}|$) y una inyección: $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Para ver que $|A| \leq |\mathbb{N}| \iff f: A \to \text{conjunto numerable}$ inyectiva

$\iff f: \text{conjunto numerable} \to A$ epiyectiva

(pues por propiedad, cardinal de la imagen del dominio es a lo más el cardinal del dominio, en este caso:

$$\left|f\begin{pmatrix}\text{conjunto}\\ \text{numerable}\end{pmatrix}\right| \leq \left|\begin{matrix}\text{conjunto}\\ \text{numerable}\end{matrix}\right| = |\mathbb{N}|$$

y por epiyectividad, en este caso, $f\begin{pmatrix}\text{conjunto}\\ \text{numerable}\end{pmatrix} = A$.

Sigue que se tiene que $|A| \leq |\mathbb{N}|$)

* ver que $A$ es infinito y es subconjunto de un numerable

P1

P1 Demostrar que cada conjunto es numerable.

P1 a) P.D.Q. $A = \{r + s\sqrt{5} \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$ es numerable.

P.D.Q. $|A| = |\mathbb{N}| \iff |A| \leq |\mathbb{N}| \wedge |\mathbb{N}| \leq |A|$

En la definición de $A$ aparece $\mathbb{Q}$ (está indexado por esos valores), entonces la intuición dice relacionar $A$ con $\mathbb{Q}$, lo cual sería conveniente pues $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$).

Notar que $\mathbb{Q} \subseteq A$ (entonces $|\mathbb{Q}| \leq |A| \Leftrightarrow |\mathbb{N}| \leq |A|$ y faltaría $|A| \leq |\mathbb{N}|$).

En efecto,

Sea $q \in \mathbb{Q}$. Se quiere ver que $q = r + s\sqrt{5}$, algún $r, s \in \mathbb{Q}$.

Basta tomar $r = q \in \mathbb{Q}$ y $s = 0 \in \mathbb{Q}$, pues $q = q + 0 \cdot \sqrt{5}$.

Sigue que $q \in A$.

Así $\mathbb{Q} \subseteq A \underset{\text{prop.}}{\Rightarrow} |\mathbb{Q}| \leq |A| \underset{|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|}{\Leftrightarrow} |\mathbb{N}| \leq |A|$ $\square$

Falta ver que $|A| \leq |\mathbb{N}| \Leftrightarrow \exists\, f: A \to N$ inyectiva, $|N| = |\mathbb{N}|$

$\Leftrightarrow \exists\, f: N \to A$ epiyectiva, $|N| = |\mathbb{N}|$

Por la definición de $A$ (elementos $r + s\sqrt{5}$ con $r, s \in \mathbb{Q}$) es "natural" tener la asignación (función) $(r, s) \mapsto r + s\sqrt{5}$ $(\forall (r, s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$.

Si se usa eso, como parte de un conjunto numerable, hay que ver que sea epi.

Notar que $\begin{cases} \varphi: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to A \\ (r, s) \mapsto \varphi((r, s)) = r + s\sqrt{5} \end{cases}$ es función y es epiyectiva.

En efecto,

* Es función bien definida por construcción (def. de $A$)

Si quisieran argumentar más formalmente, usar caract. de función $(\forall x \in \mathrm{Dom}(f))(\exists!\, y \in \mathrm{Dom}(f))$ t.q. $f(x) = y$, usando contradicción

* Es epiyectiva pues:

Sea $y \in Cod(\varphi) = A$ i.e. $y = m + l\sqrt{5}$, algún $m, l \in \mathbb{Q}$

Hay que exhibir $x \in Dom(\varphi) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ t.q. $\varphi(x) = y$.

Basta tomar $x = (m, l) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Así $\varphi(x) = y$.

Sigue que $\varphi$ es epiyectiva.

$$\Rightarrow \varphi(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = A \text{ y } |\varphi(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})| \leq \underbrace{|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}|}_{=|\mathbb{N}|} \quad (\forall \text{ función})$$

× finito de numerables

$$\Rightarrow |A| \leq |\mathbb{N}| \quad \square$$

Como $|\mathbb{N}| \leq |A|$ y $|A| \leq |\mathbb{N}|$, entonces $|A| = |\mathbb{N}|$ i.e. $A$ es numerable. Q.E.D. $\blacksquare$

P1 b) P.D.Q. $\mathcal{J} := \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(0) = 0 \wedge (\exists d \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : f(n+1) = f(n) + d \}$ es numerable

$$\Leftrightarrow |\mathcal{J}| = |\mathbb{N}| \Leftrightarrow \exists f : \mathbb{N} \to \mathcal{J} \text{ biyectiva}$$

Para mostrar numerabilidad, es útil tener de forma explícita la dependencia sobre algún conjunto numerable.

Notar que $\mathcal{J}$ se puede reescribir:

Sea $f \in \mathcal{J}$, $f(n+1) = f(n) + d$, algún $d \in \mathbb{N}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Entonces:

* $n=0$: $f(0+1) = \cancel{f(0)}^{\,0} + d$
  $\Leftrightarrow f(1) = d$

* $n=1$: $f(1+1) = \cancel{f(1)}^{\,d} + d$
  $\Leftrightarrow f(2) = 2d$

* $n=2$: $f(2+1) = \cancel{f(2)}^{\,2d} + d$
  $\Leftrightarrow f(3) = 3d$

  $\vdots$

* $n \in \mathbb{N}$: $f(n+1) = nd$ (se puede probar por inducción, pero ya "estamos (más) grandes")

O sea que $\mathcal{J} := \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \underbrace{(\exists d \in \mathbb{N})}_{\text{este elemento es el que fija a cada } f \in \mathcal{J}} (\forall n \in \mathbb{N}) : f(n) = nd \}$.

"Naturalmente", para $f \in \mathcal{J}$ se tiene la asignación $d \mapsto f_d$ $(\forall d \in \mathbb{N})$, $f_d \in \mathcal{J}$.

Notar que $\begin{cases} \varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{J} \\ \quad d \mapsto \varphi(d) = f_d \end{cases}$ es función y es biyectiva.

En efecto:

* $\varphi$ es función bien definida por construcción. (recordar argumento formal por cualquier cosa)

* $\varphi$ es biyectiva pues:

(*) $\varphi$ es inyectiva:

Sean $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(d_1) = \varphi(d_2)$.

Se quiere ver que $d_1 = d_2$.

igualdad de funciones

Por hipótesis y def. de $\varphi$: $\varphi(d_1) = \varphi(d_2) \iff f_{d_1} = f_{d_2}$

$\Rightarrow f_{d_1}(n) = f_{d_2}(n)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow n d_1 = n d_2 \iff n(d_1 - d_2) = 0$

$\Rightarrow d_1 - d_2 = 0$

$\Rightarrow d_1 = d_2$ //

en particular, son iguales en regla de asociación

Como $d_1 = d_2$, sigue que $\varphi$ es inyectiva. □

(*) $\varphi$ es epiyectiva:

Sea $h \in \mathcal{J}$ i.e. $h = f_m$, algún $m \in \mathbb{N}$.

Se quiere exhibir algún $d \in \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(d) = h$.

Por def. de $\varphi$ e igualdad de funciones, basta tomar $d = m$: $\varphi(m) = h$.

$\iff f_m = f_m$ //

Sigue que $\varphi$ es epiyectiva. □

Como $\varphi$ es biyección entre $\mathcal{J}$ y $\mathbb{N}$, sigue que $|\mathcal{J}| = |\mathbb{N}|$ i.e. $\mathcal{J}$ es numerable. ☒

(P1) c) P.D.Q. $\mathbb{M} := \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists i \in \mathbb{N}) : x = \frac{k}{3^i}\}$

$\iff |\mathbb{M}| = |\mathbb{N}| \iff \mathbb{M} = \bigcup_{\substack{i \in Y \\ Y \subseteq \mathbb{N}}} M_i$ con $M_i$ numerable

Si se reescribe un conjunto como unión (finita o numerable) de conjuntos numerables, será numerable.

Notar que, si se define $M_i := \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{(\exists k \in \mathbb{Z})}_{\text{elemento que fija } k \in \mathbb{Z} (\forall x \in M_i)} : x = \frac{k}{3^i}\}$,

entonces $\mathbb{M} = \underbrace{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}}_{\text{unión numerable}} M_i$ de numerables ← habría que mostrarlo

Sea $i \in \mathbb{N}$. Notar que $M_i$ es numerable.
Es "natural" la asignación $k \mapsto \frac{k}{3^i}$, $k \in \mathbb{Z}$, hacia $M_i$.

Notar que $\begin{cases} \varphi : \mathbb{Z} \to M_i \\ \quad k \mapsto \varphi(k) = \frac{k}{3^i} \end{cases}$ es función y es biyectiva.

* $\varphi$ es función bien definida por construcción. (recordar argumento formal por cualquier cosa)
* $\varphi$ es biyectiva pues:

(*) $\varphi$ es inyectiva:

Sean $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ t.q. $\varphi(k_1) = \varphi(k_2)$.
Se quiere ver que $k_1 = k_2$.
Por hipótesis y def. de $\varphi$: $\frac{k_1}{3^i} = \frac{k_2}{3^i} \iff k_1 = k_2$ //
$\therefore \varphi$ es inyectiva. □

(*) $\varphi$ es epiyectiva:

Sea $w \in M_i \Rightarrow w = \frac{l}{3^i}$, algún $l \in \mathbb{Z}$.
Se tiene que exhibir $x \in \mathbb{Z}$ t.q. $\varphi(x) = w$.
Por hipótesis y def. de $\varphi$, basta tomar $x = l$: $\varphi(x) = w \iff \frac{l}{3^i} = w \iff V$. //
$\therefore \varphi$ es epiyectiva.

Como $\varphi$ es biyección entre $M_i$ y $\mathbb{N}$: $|M_i| = |\mathbb{N}|$.

Como $\mathbb{M} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ i.e. unión numerable de numerables $\therefore \mathbb{M}$ es numerable. ■

$P_2$

P2 $(f_n)_{n\geq 0}$ sucesión de funciones $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f_0 = Id_{\mathbb{R}}$

$A \subseteq \mathbb{R}$. $\mathbb{B} = \{f_n(a) \mid n\in\mathbb{N}, a\in A\}$ ← imagen de cada $a\in A$, a través de cada función de la sucesión $f_n$, $n\in\mathbb{N}$.

P.D.Q. $|A| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{B}| = |\mathbb{N}|$

> Si se reescribe un conjunto como unión de conjuntos numerables (finita o numerable) será numerable.

Notar que, si se define $B_n = \underbrace{\{f_n(a) \mid a\in A\}}_{\text{conjunto imagen por } f_n \text{ de } A} = f_n(A)$, para $n\in\mathbb{N}$,

entonces $\mathbb{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Bastaría que $B_n$ fuese numerable $(\forall n\in\mathbb{N})$

Notar que $f_n(A) = \bigcup_{a\in A} \{f_n(a)\}$ de conjuntos finitos es numerable i.e. $B_n$ lo es $\forall n$.

unión numerable (A lo es)

Luego, $\mathbb{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ de numerables es numerable. ■

unión numerable

$P_3$

(P3) $A \neq \emptyset$. $\mathcal{F} := \{f : \{1,2,3\} \to A \mid f$ es función$\}$

(P3) a) P.D.Q. $|\mathcal{F}| = |A^3|$

$\in A \times A \times A$

Ind.: Considerar $(f(1), f(2), f(3))$ para $f \in \mathcal{F}$.

Se quisiera establecer una asignación entre $\mathcal{F}$ y $A^3$.
Si fuese biyectiva: $|\mathcal{F}| = |A \times A \times A|$.
Y como $A$ es numerable y $A \times A \times A$ es $\times$ finito de numerables, es numerable.

Siguiendo la indicación del enunciado:

"Naturalmente" se tiene la asignación $f \mapsto (f(1), f(2), f(3))$ $(\forall f \in \mathcal{F})$

Notar que $\begin{cases} \varphi : \mathcal{F} \to A \times A \times A \\ \quad f \mapsto \varphi(f) = (f(1), f(2), f(3)) \end{cases}$ es función y biyectiva.

* $\varphi$ es función bien definida por construcción. (recordar argumento formado por cualquier cosa)
* $\varphi$ es biyectiva pues:
  (*) $\varphi$ es inyectiva:
  Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ t.q. $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$.
  Se quiere ver que $f_1 = f_2$.
  Por hipótesis y def. de $\varphi$: $(f_1(1), f_1(2), f_1(3)) = (f_2(1), f_2(2), f_2(3))$
  $\Leftrightarrow f_1(1) = f_2(1) \wedge f_1(2) = f_2(2) \wedge f_3(1) = f_3(2)$
  igualdad de tuplas
  $\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$ $(\forall x \in \{1,2,3\})$ (son iguales en regla de asignación)

  Como también $Dom(f_1) = \mathbb{R} = Dom(f_2) \wedge Cod(f_1) = \mathbb{R} = Cod(f_2)$,
  entonces $f_1 = f_2$ como funciones //
  $\therefore \varphi$ es inyectiva. $\square$

(*) $\varphi$ es epiyectiva:

Sea $w \in A \times A \times A$ i.e. $w = (a, b, c) \in A^3$.

Hay que exhibir $f \in \mathcal{F}$ t.q. $\varphi(f) = w$.

Por def. de $\varphi$ e hipótesis, y por def. de $\mathcal{F}$, necesariamente existe $f \in \mathcal{F}$ t.q.

$f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = b$ (pues $\mathcal{F}$ es el conjunto de TODAS las $f$ de $\{1, 2, 3\}$ hacia $A$).

$\therefore$ $\varphi$ es epiyectiva. $\square$

Sigue que $\varphi$ es biyección entre $\mathcal{F}$ y $A \times A \times A$ : $|\mathcal{F}| = |A^3|$.

($P_3$) b) P.D.Q. $|A| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathcal{F}| = |\mathbb{N}|$.

Se quisiera establecer una asignación entre $\mathcal{F}$ y $A^3$.

Si fuese biyectiva: $|\mathcal{F}| = |A \times A \times A|$.

Y como $A$ es numerable y $A \times A \times A$ es $\times$ finito de numerables, es numerable.

Como $A$ es numerable y $A^3$ es $\times$ finito de numerables: $|A^3| = |\mathbb{N}|$.

Por transitividad, $|\mathcal{F}| = |\mathbb{N}|$. $\blacksquare$

P4

P4

P.D.Q. $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q} \cap [0,1]|$.

$\iff |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Q} \cap [0,1]| \wedge |\mathbb{Q} \cap [0,1]| \leq |\mathbb{Q}|$

$\mathbb{N}$ tiene el menor cardinal infinito.

En efecto,

Notar que $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{Q} \overset{\text{prop.}}{\Longrightarrow} |\mathbb{Q} \cap [0,1]| \leq |\mathbb{Q}|$. //

Por otro lado, como $\mathbb{N}$ tiene el menor cardinal infinito, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q} \cap [0,1]|$.

Pero $\mathbb{Q}$ es numerable i.e. $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

O sea $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q} \cap [0,1]| \Longrightarrow |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Q} \cap [0,1]|$ //

Como $|\mathbb{Q} \cap [0,1]| \wedge |\mathbb{Q} \cap [0,1]| \leq |\mathbb{Q}|$, entonces $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q} \cap [0,1]|$. Q.E.D. $\blacksquare$

P5

P5) a) $A, B$ t.q. $|A \cup B|$ numerable.
P.D.Q. $|A| = |\mathbb{N}| \vee |B| = |\mathbb{N}|$.

💡 Subconjuntos infinitos de numerables son numerables.

Notar que si $|A| < \infty$ y $|B| < \infty$ (ambos finitos) $\Rightarrow |A \cup B| \leq |A| + |B| < \infty$
i.e. $|A \cup B|$ no sería numerable. Así que $A$ y $B$ no son ambos finitos.

Como $A$ no es finito y $B$ no es finito
$\Leftrightarrow$ $A$ es infinito ó $B$ es infinito

Pero $\begin{cases} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{cases}$ subconjuntos de conjunto numerable $\Rightarrow$ $A$ es numerable o $B$ es numerable.

$\big( A \subseteq A \cup B \Rightarrow |A| \leq |A \cup B| = |\mathbb{N}|$ y $|B| \leq |A \cup B| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |A| \leq |\mathbb{N}|$ y $|B| \leq |\mathbb{N}|$
pero $A$ y $B$ no son finitos $\Rightarrow |A| = |\mathbb{N}|$ y $|B| = |\mathbb{N}| \big)$.

P5) b) $C, D \subseteq \mathbb{R}$. $|2| \leq |C| < \infty$ (C es finito)

$|D| = |\mathbb{N}|$

P.D.Q. $|\underbrace{\{cd \mid c \in C, d \in D\}}_{=:A}| = |\mathbb{N}|$

$$\Longleftrightarrow |A| \leq |\mathbb{N}| \wedge |\mathbb{N}| \leq |A|$$

En efecto,

Como C es finito $\Rightarrow \overbrace{C = \{c_i\}_{i=1}^{n},\ c_i \neq c_j\ \forall i,j \in [1..n]}^{\text{existe una numeración de } C}$ i.e. $|C| = n \geq 2$.

Luego, para $i \in [1..n]$ fijo, se define $\{c_i d \mid d \in D\}$

Además D es numerable, $|\{c_i d \mid d \in D\}| = |\mathbb{N}|$ (basta ver una biyección -PROPUESTO-).

Por otro lado, $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{c_i d \mid d \in D\}$. Entonces A es numerable. Q.E.D. ■

unión finita de numerables (si $0 \notin C$)

(o $\underbrace{\text{numerables y un finito si } 0 \in C}_{=\text{numerable}}$)

P5 e) ¿$A, B$ numerables $\Rightarrow A \cap B$ numerable?

Si se toman 2 conjuntos numerables disjuntos, su intersección es finita i.e. no numerable.

La proposición es FALSA.

Basta tomar, por ejemplo, $\mathbb{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ conjunto de números pares.
$\tilde{\mathbb{P}} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ conjunto números impares.

Se puede probar (propuesto) que $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}| = |\tilde{\mathbb{P}}|$ i.e. son numerables.

Pero $\mathbb{P} \cap \tilde{\mathbb{P}} = \emptyset \Rightarrow |\mathbb{P} \cap \tilde{\mathbb{P}}| = |\emptyset| = \underbrace{0 < \infty}_{\text{finito}}$ i.e. $\mathbb{P} \cap \tilde{\mathbb{P}}$ no es numerable. $\blacksquare$

P6

P6 Demostrar que el conjunto de todos los $\Delta$ cuyos vértices son
a) elementos de $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ es numerable.

💡 $\mathbb{Q}$ es numerable y $\times$ finito de numerables es numerable

Sea $T = \left\{ (a,b),(x,y),(u,v) \mid (a,b),(x,y),(u,v) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \wedge \text{cumplen desig. triangular} \right\}$

Notar que $T$ es infinito:
Si se fija $(a,b)=(0,0)$ y $(x,y)=(1,0)$, $(u,v)$ necesariamente recorre $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

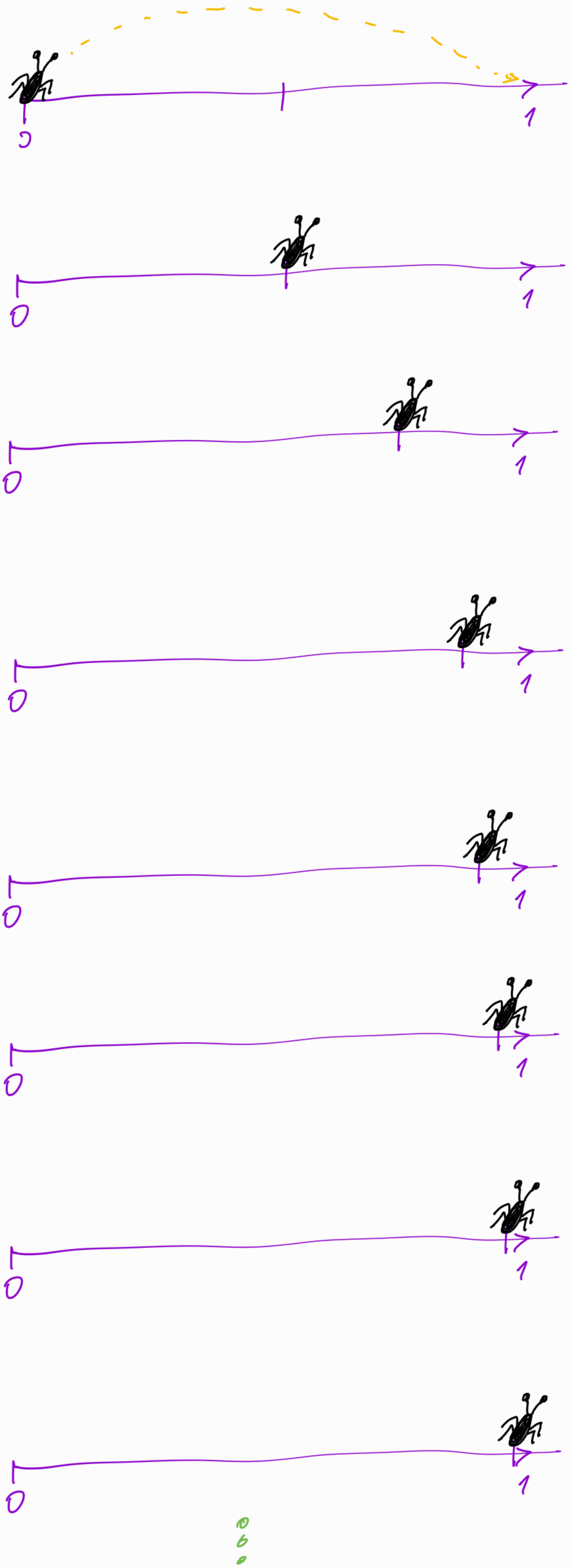
Por otro lado $T \subseteq \mathbb{Q}^2\times\mathbb{Q}^2\times\mathbb{Q}^2$ y $|\mathbb{Q}^2| = |\mathbb{N}|$ pues a $\times$ finito de numerables ($|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$)

$$\Rightarrow |T| \leq |(\mathbb{Q}^2)^3| = |\mathbb{N}|$$

$\times$ finito de numerables ($\mathbb{Q}^2$ es numerable)

Luego, como $T$ es infinito y subconjunto de numerable $\Rightarrow$ $T$ es numerable. $\blacksquare$

P6) b)




Un insecto debe cubrir, saltando, la distancia 0 a 1, avanzando de izq. a der.

En cada punto, puede elegir saltar hasta 1, y completar el recorrido, o avanzar hasta la mitad del tramo restante.

P.D.Q. para cubrir toda la distancia (partir de 0 y llegar a 1), se requiere una cantidad a lo más numerable de saltos.

$\Longleftrightarrow$ Colección de recorridos (secuencias de pasos) por los que puede optar el insecto es NUMERABLE

Si siempre se avanza la mitad de lo que queda... ¿se llega?

↳ Paradoja de Zenón: Aquiles y la tortuga.

Notar que se pregunta por la colección de recorridos por los que se puede optar el insecto (# de llegar) mas no por la cantidad de saltos.

Un recorrido es, por ejemplo, cuando el insecto salta indefinidamente, avanzando en cada salto la mitad del tramo restante $=: R_{\frac{1}{2}}$

Otra forma es si lo hace saltando $n$ veces, completando el recorrido cada vez $\forall n \geq 1$, siendo $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ la colección de estos recorridos.

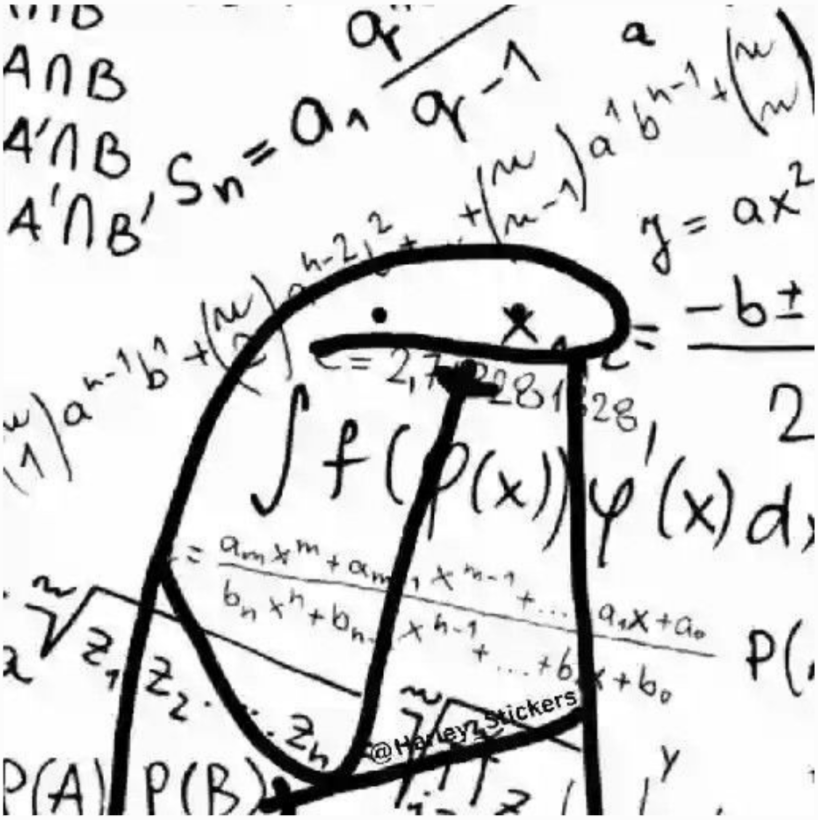
Pero $|\{R_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}| = |\mathbb{N} - \{0\}| = |\mathbb{N}|$ i.e. $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ es numerable.

Luego $|\{R_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \cup \{R_{\frac{1}{2}}\}| = |\mathbb{N}|$.

solo 1!!

Así, la colección total de recorridos es NUMERABLE. $\blacksquare$

decisión: contar $\Leftrightarrow$ encontrar funciones adecuadas!!



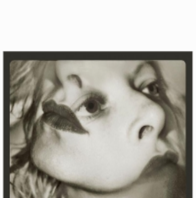

Todas estas nociones de ser numerable o no tienen distintas aplicaciones, desde Probabilidades hasta Análisis (Matemático).

También, es un contenido muy lindo :)

Quedo atenta a dudas!!

Éxito en el estudio,

— Bianca.




**Gemini**

Wild Nothing