Auxiliar 8

Sumatorias

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 12 de mayo de 2025

P1. [Sumamos]
Calcule las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})^{-1}}{\sqrt{k(k+1)}}$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k7^k \binom{n}{k}$ **d)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i2^i$

P2. [Extrañas sumas]

Se define, para $n \geq 1$, $r \neq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kr^k$. Demuestre que $S_n = r\left(S_n - nr^n\right) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$. También, muestre que se tiene $S_n = \dfrac{r-(n+1)r^{n+1}+nr^{n+2}}{(1-r)^2}$. Calcule S_n en el caso en que $r=1$.

P3. [Coeficientes]

Demuestre que $(\forall\, n, k \in \mathbb{N})$, $k < n$, se tiene que $\binom{n}{k-1} = \dfrac{k}{n-k+1}\binom{n}{k}$. Calcule $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j}\binom{n}{j-1}$.

P4. [Jugando con el coeficiente binomal, y más]

a) Muestre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k+i} \leq 1$ $(\forall k \in \mathbb{N})$.

b) Pruebe que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{j+3}{3} = \binom{n+4}{4}$. Utilice la identidad de Pascal: $\binom{a}{3} = \binom{a+1}{4} - \binom{a}{4}$, válida para $a \geq 4$.

c) Demuestre que $(\forall\, n \in \mathbb{N}) : \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}x^k$

d) Sean p, q reales no negativos tales que $p+q=1$. Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$.

e) Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$.

f) Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}5^k$. Recuerde que $\dfrac{1}{k}\binom{m-1}{j-1} = \dfrac{1}{m}\binom{m}{j}$ $(\forall\, m \in \mathbb{N}) : m \geq 1$ y $j \in [1..m]$.

P5. [Sumando ando]

El propósito de este problema es calcular una sumatoria doble. Para esto, se propone el siguiente esquema:

a) Demuestre que $(\forall\, n, i, k \in \mathbb{N})$, con $k \leq i \leq n$, se tiene que $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$.

b) Muestre que $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k} 2^{n-k}$. **c)** Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Propiedades y sumas conocidas]**: Sean $\beta \in \mathbb{R}$, y $(a_k)_{k\geq m}, (b_k)_{k\geq m}$ dos secuencias. Para todo $n \geq m$ se tienen los siguientes resultados:
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \beta a_k = \beta \sum_{k=m}^{n} a_k$
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s}^{n} a_k$
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$
  - **[Suma de Gauss]**: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
  - **[Suma de constante]**: $\displaystyle\sum_{i=k_0}^{n} 1 = (n - k_0 + 1)$
  - **[Geométrica]**: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1},\ r \neq 1$
  - **[Regalo]**: $\displaystyle\sum_{i=k_0}^{n} r^i = r^{k_0} \cdot \frac{r^{n-k_0+1}-1}{r-1},\ r \neq 1$
  - **[Binomio de Newton]**: Para $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **[Coeficiente binomial]**: Para $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$ se define el coeficiente binomial, leído "n sobre k", $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. Se puede interpretar como la cantidad de grupos de k elementos que se pueden formar de un total de n elementos.

- **[Suma de sumas]**: No hay que asustarse! Solo es otra suma (de sumas). La clave está en partir desde la primera suma (más a la derecha) factorizando los elementos que no dependen del índice, y luego resolver con sumas conocidas. Las sumas se pueden intercambiar ssi los límites inferior y superior no dependen entre sí.

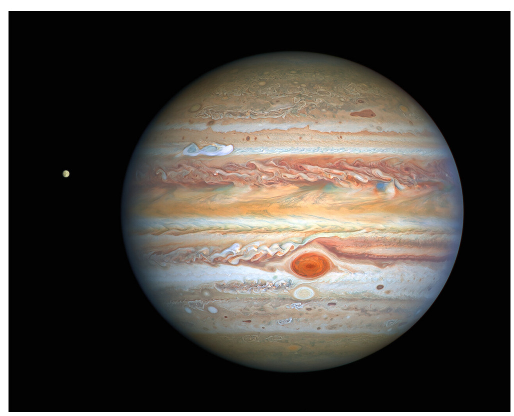

Imagen capturada el 25 de agosto del 2020 por el Hubble Space Telescope de la NASA/ESO. Se muestra a Júpiter y a Europa (una de sus lunas). La zona circular de color oscuro, conocida como Great Red Spot, es una zona de alta presión donde se tienen las condiciones para que haya una constante tormenta anticlónica; posee un diámetro de $40000 km$, ¡lo que es aproximadamente 3 veces el diámetro de la Tierra!