Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-5 Intro. al Álgebra · Otoño 2025

Auxiliar 7

Funciones y objetos asociados, y sumatorias

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 5 de mayo de 2025

P1. [¿Suma?]

Estudie inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de la función $\begin{cases} f\colon & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f((x,y)) = x+y \end{cases}$. Justifique.

P2. [Estabilidad]
Sea $f\colon A \to B$ una función. Se define un conjunto $C \subseteq A$ *estable para* f si $f^{-1}\left(f\left(C\right)\right) = C$.

a) Demuestre que si C y D son estables para f, entonces $C \cup D$ también lo es.

b) Muestre que para $(\forall\, C \subseteq A) : f^{-1}\left(f\left(C\right)\right)$ es estable para f.

P3. [Jugando con la composición]

a) Sean $g\colon A \to B$, $h\colon B \to A$ funciones. Pruebe o exhiba un contraejemplo para las siguientes afirmaciones: **i)** $h \circ g$ biyectiva $\implies$ g y h biyectivas. **ii)** $g \circ h \circ g$ biyectiva $\implies$ g y h biyectivas.

b) Sean A, B, C conjuntos no vacíos y sean $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ y $h\colon C \to A$ tales que $h \circ f \circ g \circ f \circ h$ es biyectiva. Demuestre que f, g, h son biyectivas.

P4. [Déjá vu]
Sea $\mathcal{F} = \{f\colon Z \to Z \mid f \text{ es función }\}$ y sea $g \in \mathcal{F}$ una función biyectiva fija. Se definen la funciones $G\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $H\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $G(f) = g \circ f$ y $H(f) = g^{-1} \circ f$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

a) Pruebe que G es biyectiva y demuestre que $H = G^{-1}$.

b) Se define $\mathcal{B} = \{f\colon Z \to Z \mid f \text{ es biyección }\}$. Muestre que $G^{-1}\left(\mathcal{B}\right) = \mathcal{B}$.

P5. [Sumando ando]

a) Para $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, calcule $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \left(3^{i-1} + 2i\right)$, con límite inferior 0.

b) Considere $j, k \in \mathbb{N}$, con $n \geq j, k \geq 1$. Calcule la suma $a_j := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^j\,(k+1)}{2^{2j-1}}$ y luego calcule la suma $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$.

c) Calcule, para $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la sumatoria $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$.

d) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+) : f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Muestre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{1}{i}\right) = f(n+1)$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Igualdad de funciones]**: Dos funciones son iguales si lo son en dominio, codominio y grafo.
- **[Inyectividad]**: $f\colon A \to B$ es inyectiva si y solo si

$$(\forall\, a_1, a_2 \in A) : f(a_1) = f(a_2) \implies x_1 = x_2$$

Para mostrar que una función **no es inyectiva**, basta exhibir dos elementos del dominio diferentes pero que tengan igual imagen.

- **[Sobreyectividad/epiyectividad]**: $f\colon A \to B$ es epiyectiva si y solo si

$$(\forall\, b \in B)\,(\exists\, a \in A) : f(a) = b$$

Para ver que una función **no es epiyectiva**, basta exhibir un elemento del codominio que no sea imagen de ningún elemento del dominio.

- **[Biyectividad]**: $f\colon A \to B$ es biyectiva si y solo si f es inyectiva y epiyectiva a la vez si y solo si

$$(\forall\, b \in B)\,(\exists!\, a \in A) : f(a) = b$$

- **[Función inversa]**: Es una función que realiza lo "opuesto" a una función fija. $f\colon A \to B$ es función biyectiva si y solo si $g := f^{-1}\colon B \to A$ es función, donde g corresponde a la función inversa de f, vale decir, $g(y) = x$ cada vez que $f(x) = y$ para $x \in A$ e $y \in B$:

$$(\forall\, a \in A)\,(\forall y \in B) : b = f(a) \iff f^{-1}(b) = a$$

Se cumple que:

$$(\forall\, a \in A) : f^{-1}(f(a)) = a \wedge (\forall\, b \in B) : f\left(f^{-1}(b)\right) = b$$

  - Sea $f\colon A \to B$ una función biyectiva. Entonces: f^{-1} biyectiva y $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

- **[Función composición]**: Es una función que, dadas dos funciones, recibe los elementos del dominio de una, y entrega la imagen por la otra, de la imagen de la una. Para $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ funciones, la composición de f y g es la función $g \circ f\colon A \to C$ tal que

$$(\forall\, a \in A) : (g \circ f)\,(x) = g\,(f(x))$$

  - Sea $f\colon A \to B$ una función biyectiva. Entonces: $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}(f)} \wedge f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Cod}(f)}$.
  - $\circ$ es asociativa (¡no connmuta!)
  - $\mathrm{Id}_{\mathrm{Cod}(f)} \circ f = f \wedge f \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}(f)} = f$.
  - $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
  - Composición de inyectivas, epiyectivas, biyectivas, es inyectiva, epiyectiva y biyectiva, respect.
  - Si composición es inyectiva, entonces la primera función compuesta es inyectiva.
  - Si composición es epiyectiva, entonces la última función compuesta es epiyectiva.

- **[Cálculo de inversas]**: Sean $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ funciones. Basta ver que se cumplan dos cualesquiera de las siguientes condiciones, para que f sea biyectiva y g su inversa:

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}(f)}, \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Cod}(f)}, \quad g \text{ es biyectiva}$$

- **[Conjunto imagen y preimagen]**: Sean $f\colon \mathrm{Dom}\,(f) \to \mathrm{Cod}\,(f)$ una función. Sean $A \subseteq \mathrm{Dom}\,(f)$ y $B \subseteq \mathrm{Cod}\,(f)$. El conjunto imagen y preimagen son, respectivamente:

$$f\,(A) = \{y \in \mathrm{Cod}\,(f) \mid (\exists\, x \in A) : y = f(x)\} \subseteq \mathrm{Cod}\,(f)$$

$$f^{-1}\,(B) = \{x \in \mathrm{Dom}\,(f) \mid f(x) \in B\} \subseteq \mathrm{Dom}\,(f)$$

- **[Propiedades de sumatorias]**: Sean $\beta \in \mathbb{R}$, y $(a_k)_{k \geq m}, (b_k)_{k \geq m}$ dos secuencias. Para todo $n \geq m$ se tiene que:
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \beta a_k = \beta \sum_{k=m}^{n} a_k$
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s}^{n} a_k$
  - $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$
  - $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \; r \neq 1$