Auxiliar 9

Relaciones

Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 26 de mayo de 2025

P1. [Ordenado]
A continuación, se definen distintas relaciones. El objetivo de este problema es demostrar que son de orden.

a) Sea $\mathcal{R}$ una relación de orden definida sobre el conjunto E. Se define otra relación de orden $\mathcal{R}^*$ en $E \times E$ por $(a,b)\mathcal{R}^*(c,d) \iff (a \neq c \wedge a\mathcal{R}c) \vee (a = c \wedge b\mathcal{R}d)$.

b) Sobre un conjunto de proposiciones lógicas $\mathcal{P}$ se define la relación $\mathcal{R}$ por $p\mathcal{R}q \iff (p \wedge q \iff q)$.
Además, para $p, q \in \mathcal{P}$ se dice que $p = q$ si y sólo si $p \iff q$.

- **i)** Demuestre que $\mathcal{R}$ un orden total.

c) Sea $\mathcal{F} = \{(A, f) \mid A \subseteq \mathbb{R} \wedge f\colon A \to \mathbb{R} \text{ función}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la relación Ω por:

$$(A, f)\, \Omega\, (B, g) \iff \{A \subseteq B \wedge (\forall\, x \in A) : f(x) = g(x)\}$$

- **i)** ¿Es Ω un orden total en $\mathcal{F}$? Justifique.

P2. [Equivalente]
A continuación, se definen distintas relaciones. El objetivo de este problema es demostrar que son de equivalencia, determinar la clase de equivalencia de sus elementos y caracterizar el conjunto cociente, así como los ítems pedidos.

a) En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se define la relación $\mathcal{R}$ por $a\mathcal{R}b \iff a + \dfrac{1}{a} = b + \dfrac{1}{b}$.

b) Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por $m\mathcal{R}n \iff m^2 - n^2$ es múltiplo de 3.

- **i)** Determine 4 elementos de $[0]_{\mathcal{R}}$ y de $[1]_{\mathcal{R}}$.

c) Sea E un conjunto y $A \neq \emptyset$ un subconjunto fijo de E.
Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ por $X\mathcal{R}Y \iff A \setminus X = A \setminus Y$.

- **i)** Demuestre que $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X]_{\mathcal{R}} \mid X \in \mathcal{P}(A)\}$.

d) Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $(a, b)\, \mathcal{R}\, (c, d) \iff a + b \equiv_2 c + 3d$.

- **i)** Muestre que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}^2$ y que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

e) Sea $f\colon A \to B$ función y S relación de equivalencia en B. Se define la relación R en A por $aRb \iff f(a)Sf(b)$.

- **i)** Demuestre que $[a]_R = f^{-1}\left([f(a)]_S\right)$.

f) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, se define la función $f_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x + \beta\, (\forall\, x \in \mathbb{R})$.
Considere G el conjunto de las funciones $f_{\alpha,\beta}$, sea S el conjunto de funciones que van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{R}$ la relación sobre S tal que $f\mathcal{R}g \iff g^{-1} \circ f \in G$.

- **i)** Demuestre que $[\mathrm{Id}]_{\mathbb{R}} = G$.

P3. [Muchas dimensiones]

Se define en $\mathbb{R}^n$ la relación $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathcal{S}\,(y_1, y_2, \ldots, y_n) \iff \sum_{i=1}^{n} x_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

a) Demuestre que S es una relación de equivalencia.

b) Demuestre que $[(2,3,4,\ldots,n+1)]_{\mathcal{S}} = \left\{ (x_i)_i^n \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n(n+3)}{2} \right\}$

c) Se define la función $\begin{cases} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n/\mathcal{S} \\ & (x) \mapsto f(x) = [(x,0,\ldots,0)]_{\mathcal{S}} \end{cases}$. ¿Es biyectiva? Justifique.

P4. [Particiones]

Para cada $c \in \mathbb{R}$ se define el conjunto $A_c = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + 5y = x\}$.

Demuestre que $\mathcal{A} = \{A_c \mid c \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Relación]**: Una 3-tupla de conjuntos $(A, B, \mathcal{R})$ es una relación si cumple que $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, donde A y B se denominan dominio y codominio, respectivamente.

  Se denota $a\mathcal{R}b$ para $(a,b) \in \mathbb{R}$. Solo se considerarán relaciones de un conjunto en sí mismo.

- **[Tipos de relaciones]**: Se dice que la relación $\mathcal{R}$ en A es:

  [refleja]: si $(\forall\, x \in A) : x\mathcal{R}x$

  [simétrica]: si $(\forall\, x, y \in A) : x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$

  [antisimétrica]: $(\forall x, y \in A) : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \implies x = y$

  [transitiva] si $(\forall\, x, y, z \in A) : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}y$

- **[Relación de orden]**: $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, o simplemente un orden en A, si es una relación en A que es **refleja**, **antisimétrica** y **transitiva**.

  x precede a y si $x\mathcal{R}y$ $x, y \in A$ son comparables si se cumple que $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}y$, es decir, si x precede a y o y precede a x.

  Es un orden total si cualesquiera dos elementos son comparables.

- **[Relación de equivalencia]**: $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A si es una relación en A que es **refleja**, **simétrica** y **transitiva**.

- **[Clase de equivalencia]**: clase de equivalencia sea $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a asociada a $\mathcal{R}$ como el conjunto de los elementos que se relacionan a a: $[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x)\} \subseteq A$.

  para todo $x, y \in \mathrm{Dom}(\mathcal{R})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}} \iff [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset \iff [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}} \iff x\mathcal{R}y$

- **[Conjunto cociente]**: corresponde al conjunto de las clases de equivalencia de una relación de equivalencia, y se denota $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$.

- **[Partición de conjuntos]**: $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es una partición de A si las siguientes tres condiciones se cumplen:
  - que ningún elemento de $\mathcal{C}$ es no vacío (cada elemento tiene algo).
  - los elementos de $\mathcal{C}$ son disjuntos de a pares.
  - $\mathcal{C}$ cubre A.