

HOLA ☺

¿Dudas?

2025/11/7

[Estabilidad]

Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Se define un conjunto $C \subseteq A$ estable para f si $f^{-1}(f(C)) = C$.

a) Demuestre que si C y D son estables para f , entonces $C \cup D$ también lo es.

b) Muestre que para $(\forall C \subseteq A) : f^{-1}(f(C))$ es estable para f .

b) P.D.Q. $(\forall C \subseteq A) : f^{-1}(f(C))$ es f -estable

$$\underbrace{f^{-1}(f(C))}_{=: W} \quad \checkmark \text{ def. } f^{-1}(\cdot) \quad \Leftrightarrow f^{-1}(f(W)) = W, W \subseteq A \Leftrightarrow$$

$$\text{ej. } W = f^{-1}(f(C)), C \subseteq A.$$

$$\text{P.D.Q. } f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(f(C))\right)\right) = f^{-1}(f(C))$$

$$\subseteq f^{-1}(f(W)) \subseteq W \Rightarrow x \in A$$

Sea $x \in f^{-1}(f(W))$. Se quiere ver que $x \in W := f^{-1}(f(C)) = \{\bar{x} \in A \mid f(\bar{x}) \in f(C)\}$

$$\text{Como } x \in f^{-1}(f(W)) \Rightarrow f(x) \in f(W).$$

$$\text{Como } f(x) \in f(W) \xRightarrow{\text{def. } f^{-1}} (\exists w \in W) : f(w) = f(x). \text{ Como } w \in W = f^{-1}(f(C)), C \subseteq A$$

$$\Rightarrow f(w) \in f(C)$$

$$\text{O sea, } f(x) \in f(C) \xRightarrow{\text{def. } W} x \in W. \quad \square$$

Como $f^{-1}(f(W)) = W$ para $C \subseteq A$ y $W \subseteq A$
 $\Rightarrow W$ es f -estable. $\square$

¿cómo es la prop.?

unión no se porta bien con todo

inte

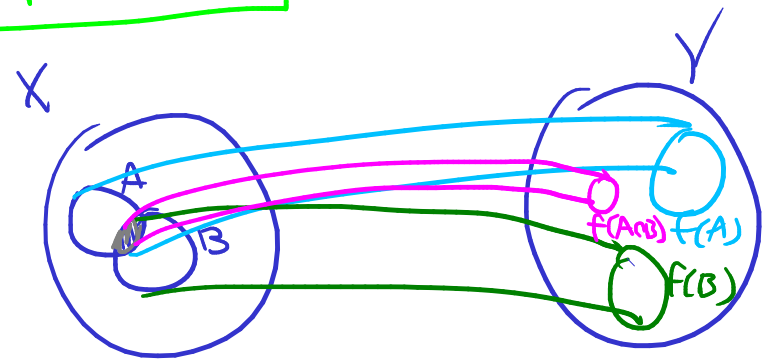
⚠ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ ←

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$A, B \subseteq X$$

$$f: X \rightarrow Y$$

✓ prop. 4.20



¿mo veo iny.?

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \\ (x, Y) \mapsto f((x, Y)) = (Y^c, ax + b) \end{cases} \quad a \neq 0$$

$$\text{iny. } (\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)): f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R})): f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\hookrightarrow \text{Sea } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}). \Rightarrow x_1 = (w_1, Y_1) \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}), \text{ algùn } w_1 \in \mathbb{R}, Y_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (\forall (x_1, Y_1), (x_2, Y_2) \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R})): f((x_1, Y_1)) = f((x_2, Y_2)) \Rightarrow (x_1, Y_1) = (x_2, Y_2)$$

epi?

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \\ (x, Y) \mapsto f((x, Y)) = (Y^c, ax + b) \end{cases}$$

P.D.A. biyectiva $\Leftarrow a \neq 0$

Sobre $(\forall y \in \text{Cod}(f)) (\exists x \in \text{Dom}(f)): f(x) = y$

$$\Leftrightarrow (\forall (Z, w) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}) (\exists (x, Y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})): f((x, Y)) = (Z, w)$$

Sea $(Z, w) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ i.e. $Z \subseteq \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{R}$.

Se tomará $(x, Y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\boxed{(\frac{w-b}{a}, Z^c)}$

$$\text{Pues } f((x, Y)) = (Y^c, ax + b) \stackrel{!}{=} (Z, w) \Rightarrow Y^c = Z \text{ y } ax + b = w$$

= de Z-typos

$$\Rightarrow Y = Z^c \text{ y } x = \frac{w-b}{a}$$

$a \neq 0$

¿cómo veo que es epi.?

$$\mathcal{F} := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ función}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$\begin{cases} \phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \phi(f) = f(0) \end{cases}$$

$$f(x) = x^2, f(0) = 0$$

P.D.Q. ϕ es epyectiva $\Leftrightarrow (\forall y \in \text{Cod}(\phi)) (\exists x \in \text{Dom}(\phi)) : \phi(x) = y$

Sea $y \in \mathbb{R}$.

Se tomará $f \in \mathcal{F}$ t.q.

$$\boxed{f(0) = y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

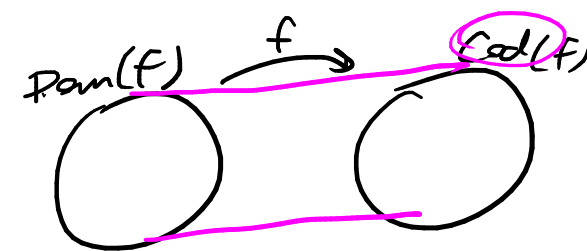
$$\text{Pues } \phi(f) = y \Leftrightarrow \boxed{f(0) = y}$$

¿Cómo demostrarlas?

Proposición 4.23 Sea $f: A \rightarrow B$ función, $A \subseteq A$ y $B \subseteq B$. Se tiene:

(I) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(II) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(\text{Dom}(f))$.



(I) P.D.Q. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, $A \subseteq \text{Dom}(f)$

(II) P.D.Q. $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(\text{Dom}(f))$, $B \subseteq \text{Cod}(f)$

Sea $x \in A$

P.D.Q. $x \in f^{-1}(f(A))$

$\Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\subseteq$ $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(\text{Dom}(f))$

$f^{-1}(B) \subseteq \text{Dom}(f) \Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subseteq f(\text{Dom}(f))$

imagen preimagen contención

Sea $y \in f(f^{-1}(B))$. P.D.Q. $y \in B$

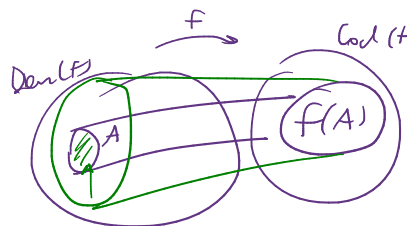
$f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\text{Cod}(f)}$

$\Rightarrow (\exists x \in f^{-1}(B)) : f(x) = y$

$x \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f(x) \in B$

$y = f(x) \Rightarrow y \in B$



Matías

función inversa y preimagen/imagen de directa

$$f: A \rightarrow B, \text{ biy} \Leftrightarrow f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$f^{-1}(A)$$

preimagen de
A por f

=

$$f^{-1}(A)$$

imagen de
A por f^{-1}

Resolverlo

E conjunto de uf -; $A, B \subseteq E$.

$$\begin{cases} f: \mathcal{P}(A \cup B) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto f(X) = (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

$A^C = E \setminus A = E \cap A^C$

$$a) \begin{cases} g: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A \cup B) \\ (W, Z) \mapsto g((W, Z)) = W \cup Z \end{cases}$$

* Verifican que $g \circ f = Id_Z = Id_{\text{Dom}(f)} = Id_{\text{Cod}(g)}$

$\hookrightarrow$ Dom/Cod y regla de asoc.

Concluir f inyectiva.

Como Id_Z es bij. y $g \circ f = Id_Z \Rightarrow g \circ f$ es bij

$\Rightarrow g \circ f$ es iny

$\Rightarrow f$ es iny. $\square$

* $\text{Dom}(g \circ f) = \text{Dom}(f) = \mathcal{P}(A \cup B) = \text{Dom}(Id_{\mathcal{P}(A \cup B)})$

* $\text{Cod}(g \circ f) = \text{Cod}(g) = \mathcal{P}(A \cup B) = \text{Dom}(Id_{\mathcal{P}(A \cup B)})$

* Sea $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. P.D.Q. $(g \circ f)(X) = Id_{\mathcal{P}(A \cup B)}(X)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(X) &\stackrel{\text{def. } g}{=} g(f(X)) \stackrel{\text{def. } f}{=} g((X \cap A, X \cap B)) \\ &\stackrel{\text{def. } g}{=} (X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) \\ &\stackrel{\text{def. } g}{=} X = Id_{\mathcal{P}(A \cup B)}(X) \end{aligned}$$

$X \subseteq A \cup B$

$\left\{ \begin{array}{l} Id_A: A \rightarrow A \\ a \mapsto Id_A(a) = a \end{array} \right.$ * Siempre tiene el mismo Dom y Cod
* biyectiva

Clemente

intuición para ver sobre?

f no es sobre.

$$\Leftrightarrow (\forall y \in \text{Cod}(f)) (\exists x \in \text{Dom}(f) : f(x) = y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in \text{Cod}(f)) (\forall x \in \text{Dom}(f) : f(x) \neq y)$$

↖ hay algún elemento del codominio al cual no puedo llegar con f

0°) preguntarse qué pasaría si no es sobre.

1°) caracterizar cuándo es sobre.
↳ encontrar condición suficiente

2°) tomar el caso en que solo hay

¿cómo veo la b)?

[Déjà vu]

Considere un conjunto de referencia Z no vacío y A un subconjunto no vacío. Se definen las funciones:

$$\begin{cases} f: \mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(Z) \\ X \mapsto f(X) = X \setminus A \end{cases} \quad \begin{cases} g: \mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(Z) \\ X \mapsto g(X) = X \cup A \end{cases}$$

a) Demuestre que $f \circ g = f$ y que $g \circ f = g$. b) Muestre que $f^{-1}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(A)$ y que $(\forall X \in \mathcal{P}(Z)) : f(X) \neq A$.



general

$$f^{-1}(\{\emptyset\}) \neq \{f^{-1}(\emptyset)\}$$

conjunto imagen de $\{\emptyset\}$ por f^{-1}

conjunto (singleton) de element $f^{-1}(\emptyset)$

$f^{-1}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(A) \leftarrow$ igualdad de conjuntos

conjunto pre imagen

sea $X \in f^{-1}(\{\emptyset\})$

$\Leftrightarrow f(X) \in \{\emptyset\}$

← elemento de f

$\Leftrightarrow f(X) = \emptyset$

$\Leftrightarrow X \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow X \cap A^c = \emptyset$

$\Leftrightarrow X \subseteq A \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A)$

$f^{-1}(W) \equiv$ conjunto preimagen $\neq f^{-1}(W)$ preimagen del elemento

$f(X)$ es conjunto imagen si $X \subseteq \text{Dom}(f)$

si $X \in \text{Dom}(f)$, $f(X)$ es "elemento"

$f^{-1}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$

Salvador

Muchas gracias a quienes pudieron conectarse!!

Va a quedar disponible este material.

Yo muy feliz de contestar sus dudas 😊

Éxito en el estudio!!!