DESARROLLO PARCIAL AUX 7

FUNCIONES Y OBJETOS ASOCIADOS, Y SUMATORIAS

MA1101-5

2025-1

Profesora: Hanne Van Den Bosch

Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

AUX 7

[¿Suma?] biy. $\Leftrightarrow$ iny. $\wedge$ sob.

Estudie inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de la función $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f((x,y)) = x+y \end{cases}$. Justifique.

inyectividad $(\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)) : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\overline{p \Rightarrow q}$
$\Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \vee q)}$

No iny.: $(\exists\ x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)) : f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$.

Notar que $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f((x,y)) = x+y$ $\xrightarrow{\text{conm}}$ $f((x,y)) = x+y = y+x = f((y,x))$

Por otro lado, notar que $(y,x) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f((y,x)) = y+x$ pero $(x,y) \neq (y,x)$

$\therefore f$ no es inyectiva// $(\Rightarrow f$ no es biyectiva$)$.

[¿Suma?]

biy. $\Leftrightarrow$ iny. $\wedge$ sob.

Estudie inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de la función $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f((x,y)) = \boxed{x+y} \end{cases}$ Justifique.

Sobreyectividad $(\forall y \in Cod(f))(\exists x \in Dom(f)): f(x) = y$

No sob. $:\cdot$ $(\exists y \in Cod(f))(\forall x \in Dom(f)): f(x) \neq y$

En efecto,

Sea $y \in Cod(f) = \mathbb{R}$.

Se quiere exhibir $(x_1^{(y)}, x_2^{(y)}) \in Dom(f) = \mathbb{R}^2$ t.q. $f((x_1, x_2)) = y$.

$(y,0)$, $(\alpha y, (1-\alpha)y)$

$(0,y)$, $\alpha \in (0,1)$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = y$.

Basta tomar $x_1 = \frac{1}{2}y$, $x_2 = \frac{1}{2}y \Rightarrow f((\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y)) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = y$ //

$\therefore$ f es sobreyectiva. ∎

P_2 AUX 7

[Estabilidad]

Sea $f : A \to B$ una función. Se define un conjunto $\boxed{C \subseteq A \textit{ estable para } f \text{ si } f^{-1}(f(C)) = C.}$

a) Demuestre que si C y D son estables para f, entonces $C \cup D$ también lo es.

b) Muestre que para $(\forall\, C \subseteq A) : f^{-1}(f(C))$ es estable para f.

"preimagen se porta bien"

$f^{-1}(\cup) = f^{-1} \cup f^{-1}$

$f^{-1}(\cap) = f^{-1} \cap f^{-1}$

$\subseteq$

⚠ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

prop. ✔ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

a) P.D.Q. $\underbrace{C, D \text{ son } f\text{-estables}}_{\substack{f^{-1}(f(C)) = C \\ f^{-1}(f(D)) = D}} \Rightarrow \underbrace{C \cup D \ f\text{-estable}}_{f^{-1}(f(C \cup D)) = C \cup D \text{ y } C \cup D \subseteq A}$

$\Leftrightarrow$ def. est.

$\Leftrightarrow$ def. f

Por demostración directa,

Sean C, D f-estables i.e. $f^{-1}(f(C)) = C$, $f^{-1}(f(D)) = D$, con $C, D \subseteq A$.

Se quiere ver que $C \cup D$ es f-estable i.e. $f^{-1}(f(C \cup D)) = C \cup D$ y $C \cup D \subseteq A$.

En efecto,

* Como $C, D \subseteq A \Rightarrow C \cup D \subseteq A$ //

* Notar que $f^{-1}(f(C \cup D)) \underset{\text{prop. } f}{=} f^{-1}(f(C) \cup f(D)) \underset{\text{prop. } f^{-1}}{=} f^{-1}(f(C)) \cup f^{-1}(f(D)) \underset{C, D \text{ son } f\text{-estables}}{=} C \cup D.$ ■

[Estabilidad]

Sea $f\colon A \to B$ una función. Se define un conjunto $C \subseteq A$ *estable para* f si $f^{-1}(f(C)) = C$.

a) Demuestre que si C y D son estables para f, entonces $C \cup D$ también lo es.

b) Muestre que para $(\forall\, C \subseteq A) : f^{-1}(f(C))$ es estable para f.

b) P.D.Q. $(\forall C_1 \subseteq A) : \underbrace{f^{-1}(f(C_1))}_{=:W}$ es f-estable

$$\iff f^{-1}(f(W)) = W \;,\; \underbrace{W \subseteq A}_{\checkmark \text{ def. } f^{-1}(\cdot)}$$

Sea $C_1 \subseteq A$ arbitrario.

Hay que ver la igualdad (se verá por doble inclusión) y la inclusión (directa).

$\supseteq$) $W \underset{\subseteq A}{\subseteq} f^{-1}(f(W))$

Sea $w \in W$. Se quiere ver que $w \in f^{-1}(f(W)) := \{\boxed{x \in A} \mid \boxed{f(x) \in f(W)}\}$

En efecto, como $w \in W \Rightarrow \boxed{f(w) \in f(W)}$

Obs.: $W \subseteq A \Rightarrow \boxed{w \in A}$.

Es directo que $w \in f^{-1}(f(W))$, por def. $\therefore W \subseteq f^{-1}(f(W))$ $\square$

[Estabilidad]

Sea $f\colon A \to B$ una función. Se define un conjunto $C \subseteq A$ *estable para* f si $f^{-1}(f(C)) = C$.

a) Demuestre que si C y D son estables para f, entonces $C \cup D$ también lo es.

b) Muestre que para $(\forall\, C \subseteq A) : f^{-1}(f(C))$ es estable para f.

ojo : $W = f^{-1}(f(C)),\ C \subseteq A$.

b) P.D.Q. $(\forall C \subseteq A)$: $\underbrace{\underbrace{f^{-1}(f(C))}_{=:W} \text{ es } f\text{-estable}}_{\iff f^{-1}(f(W)) = W\ ,\ \overbrace{W \subseteq A}^{\checkmark \text{ def. } f^{-1}(\cdot)}}$

$\subseteq$ | $f^{-1}(f(W)) \subseteq W$

Sea $\boxed{x \in f^{-1}(f(W))}$. $\subseteq A \Rightarrow x \in A$ Se quiere ver que $x \in W := f^{-1}(f(C)) = \{\boxed{\bar{x} \in A} \mid \boxed{f(\bar{x}) \in f(C)}\}$

Como $x \in f^{-1}(f(W)) \underset{\text{def. } f^{-1}}{\Rightarrow} \boxed{f(x) \in f(W)}$.

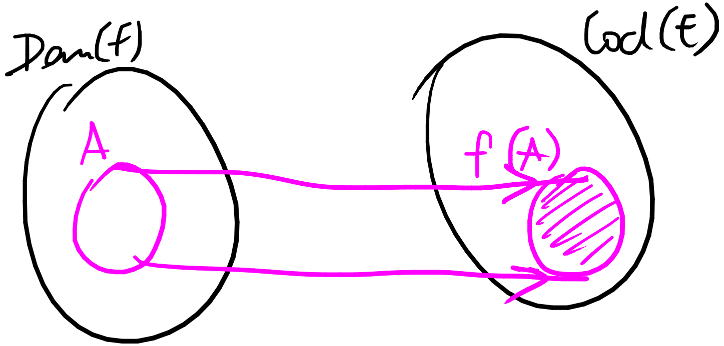
Como $f(x) \in f(W) \underset{\text{def. } f}{\Rightarrow} \boxed{(\exists\, w \in W) : f(w) = f(x)}$. Como $w \in W = f^{-1}(f(C)),\ C \subseteq A$

$\underset{\text{def. } f^{-1}}{\Rightarrow} \boxed{f(w) \in f(C)}$

O sea, $\boxed{f(x) \in f(C)} \underset{\text{def. } W}{\Rightarrow} x \in W$. $\square$

Como $f^{-1}(f(W)) = W$ para $C \subseteq A$ y $W \subseteq A$
$\Rightarrow W$ es f-estable. $\blacksquare$

$f : Dom(f) \to Cod(f)$

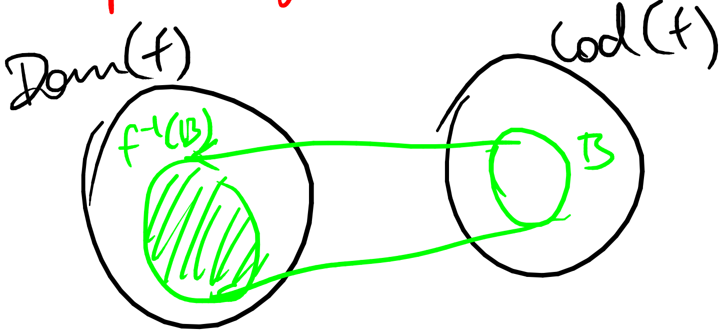


CONJUNTO imagen

$* \; A \subseteq Dom(f) \Rightarrow f(A) = \{ y \in Cod(f) \mid (\exists x \in A) : f(x) = y \}$ "alguien de A me mandó"

$* \; B \subseteq Cod(f) \Rightarrow f^{-1}(B) = \{ x \in Dom(f) \mid \underbrace{f(x) \in B}_{(\exists y \in B) : f(x) = y} \}$ "soy t.q. mi imagen está en B"

CONJUNTO pre imagen



P3 a) AUX 7

"llegada"   "partida"   "dominio"

$f \circ g \circ h \circ \dots \circ z$ → $\boxed{iny}$ ⟹ z es iny. (1ª función: + a la derecha)

→ $\boxed{sob}$ ⟹ f es sob (última función: + a la izq).

"codominio"

hacia allá ← se lee la "∘"

[Jugando con la composición]

a) Sean $g\colon A \to B$, $h\colon B \to A$ funciones. Pruebe o exhiba un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:
i) $h \circ g$ biyectiva $\implies$ g y h biyectivas. ii) $g \circ h \circ g$ biyectiva $\implies$ g y h biyectivas.

[redacted]

a) $g: A \to B$, $h: B \to A$

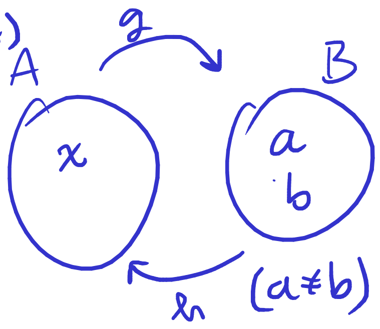
i) $h \circ g$ biy $\Rightarrow$ $\underline{g, h \text{ biy.}}$ ★

$$\text{Se va a mostrar un contraej donde } h\circ g \text{ biy. y } \overbrace{g \wedge h \text{ biy es FALSO}}^{\text{alguna (al menos) es no biyectiva}}$$

$\overbrace{\text{(al menos)}}^{\text{i.e. al menos iny ó sob.}}$

$Dom(h\circ g) = Dom(g) = A = Dom(Id_A)$

$Cod(h\circ g) = Cod(h) = A = Cod(I_A)$



$$\boxed{\begin{array}{l} g(x) = a \\ h(b) = x \\ h(a) = x \end{array}}$$

$g(x)=a$, injectiva directam (no epi).

$h(b)=x$, $h(a)=x$, epiyectiva (no iny).

Notar que $\underbrace{(h\circ g)(x)}_{\text{para } x \in A} = h(g(x)) = h(a) = x = Id_A(x)$

$\therefore$ $I_A = h\circ g$ y Id_A es biy $\to$ $\boxed{h\circ g \text{ es biy.}}$ $\therefore$ ★ es FALSA

[Jugando con la composición]

a) Sean $g\colon A \to B$, $h\colon B \to A$ funciones. Pruebe o exhiba un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:
i) $h \circ g$ biyectiva $\implies$ g y h biyectivas. **ii)** $g \circ h \circ g$ biyectiva $\implies$ g y h biyectivas.

[redacted]

a) $g: A \to B$, $h: B \to A$

ii) P.D.Q. $g \circ h \circ g$ biy $\Rightarrow g, h$ bijectivas

En efecto,

Como $g \circ h \circ g$ es biy $\xRightarrow{\text{def. biy}}$ $\left\{ \begin{array}{l} g \circ h \circ \overset{d}{g} \text{ es iny.} \Rightarrow g \text{ iny} \\ \underset{q}{g} \circ h \circ g \text{ es epi.} \Rightarrow g \text{ epi.} \end{array} \right\}$ prop. $\boxed{g \text{ es bijectiva}}$

$\overset{\text{def. biy.}}{\iff}$ $\exists g^{-1}: B \to A$ t.q. $\boxed{g \circ g^{-1} = Id_B}$, $\boxed{g^{-1} \circ g = Id_A}$

g^{-1} es bijectiva

Si $g \circ (h \circ g) = f$ / $g^{-1} \circ$

$\Rightarrow \boxed{(g^{-1} \circ g)} \circ (h \circ g) = g^{-1} \circ f$

$\Rightarrow Id_A \circ (h \circ g) = g^{-1} \circ f$

$\Rightarrow h \circ g = g^{-1} \circ f$

Se tiene $h \circ g = g^{-1} \circ f$ / $\circ g^{-1}$

$\Rightarrow h \circ (g \circ g^{-1}) = g^{-1} \circ f \circ g^{-1}$

$\Rightarrow h \circ Id_B = g^{-1} \circ f \circ g^{-1}$

$\Rightarrow h = \underset{\text{biy}}{g^{-1}} \circ \underset{\text{biy}}{f} \circ \underset{\text{biy}}{g^{-1}}$ $\xRightarrow{\text{prop.}}$ $\boxed{h \text{ es bijectiva}}$

$\therefore$ se tiene lo pedido.

P_3 b) AUX 7

[Jugando con la composición]

[redacted]

b) Sean A, B, C conjuntos no vacíos y sean $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ y $h\colon C \to A$ tales que $\underbrace{h \circ f \circ g \circ f \circ h}_{=\mathcal{J}}$ es biyectiva. Demuestre que f, g, h son biyectivas.

$\begin{cases} A \subseteq A \\ B \subseteq B \\ \boxed{C \subseteq A} \\ B \subseteq C \end{cases}$ pues $\mathcal{J}$ está bien def.

b) $h \circ f \circ g \circ f \circ h$ bij $\Rightarrow$ f, g, h biyectivas

En efecto,

Como $h \circ f \circ g \circ f \circ h$ biy $\nearrow$ iny $\Rightarrow$ h iny (1°) ; $\searrow$ epi $\Rightarrow$ h epi (última) $\Big\}$ $\exists\, h^{-1}: A \to C$ t.q. $\boxed{h \circ h^{-1} = Id_A}$, $\boxed{h^{-1} \circ h = Id_C}$, h^{-1} biyectiva

h es biy $\Leftarrow$

$\Rightarrow h \circ f \circ g \circ f \circ h = \mathcal{J} \quad / \circ h^{-1}$

$\Rightarrow h \circ f \circ g \circ \boxed{f \circ Id_A} = \mathcal{J} \circ h^{-1}$

$\Rightarrow h \circ f \circ g \circ f = \mathcal{J} \circ h^{-1} \quad / \, h^{-1} \circ$

$\Rightarrow \boxed{Id_C} \circ (f \circ g \circ f) = h^{-1} \circ \mathcal{J} \circ h^{-1}$

$\Rightarrow f \circ g \circ f = h^{-1} \circ \mathcal{J} \circ h^{-1}$

biy biy biy

$f \circ g \circ f = \tilde{\mathcal{J}}$ biy $\nearrow$ iny $\Rightarrow$ f iny (1°) ; $\searrow$ sob $\Rightarrow$ f sob (último) $\Big\}$ $\exists\, f^{-1}: B \to A$ $\boxed{f \circ f^{-1} = Id_B}$, $\boxed{f^{-1} \circ f = Id_A}$, f^{-1} biy

f es biy $\Leftarrow$

$\circ f^{-1}$

$\Rightarrow (f \circ g) \circ \boxed{(f \circ f^{-1})} = \tilde{\mathcal{J}} \circ f^{-1}$

$\Rightarrow f \circ g \circ Id_B = \tilde{\mathcal{J}} \circ f^{-1}$

$\Rightarrow f \circ g = \tilde{\mathcal{J}} \circ f^{-1} \quad / \, f^{-1} \circ$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1} \circ f} \circ g = f^{-1} \circ \tilde{\mathcal{J}} \circ f^{-1}$

$\Rightarrow Id_A \circ g = f^{-1} \circ \tilde{\mathcal{J}} \circ f^{-1}$

$\Rightarrow g = f^{-1} \circ \tilde{\mathcal{J}} \circ f^{-1}$

biy biy biy

composición biy $\Rightarrow$ g es biy

P_4 a) AUX 7

MÉTODO DE CÁLCULO DE INVERSA

Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Cod}(f)$.

Sea $\varphi: A \to B$ t.q. es candidata a inversa de f, i.e. $\varphi = f^{-1}$

Si $\mathrm{Dom}(\varphi) = A = \mathrm{Cod}(f)$ y $\mathrm{Cod}(\varphi) = B = \mathrm{Dom}(f)$, y se cumplen al menos 2 de las sgtes 3 condiciones:

(i) $f \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Cod}(f)}$

(ii) $\varphi \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}(f)}$

(iii) φ es biyectiva

Entonces f es biyectiva y φ es su inversa.

$f: \underset{\mathrm{Dom}(f)}{A} \to B = \mathrm{Cod}(f)$

$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{B=\mathrm{Cod}(f)}$

$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{A=\mathrm{Dom}(f)}$

f^{-1} biyectiva

[Déjá vu]
Sea $\mathcal{F} = \{f : Z \to Z \mid f \text{ es función } \}$ y sea $g \in \mathcal{F}$ una función biyectiva fija. Se definen la funciones $G : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $H : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $G(f) = g \circ f$ y $H(f) = g^{-1} \circ f$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

a) Pruebe que G es biyectiva y demuestre que $H = G^{-1}$.

[redacted]

$\mathcal{F} := \{f : Z \to Z \mid f \text{ es función}\} =: Z^Z$

$g \in \mathcal{F}$ y g biyectiva

$$\begin{cases} G : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ \quad f \mapsto G(f) = g \circ f \end{cases} \qquad \begin{cases} H : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ \quad f \mapsto H(f) = g^{-1} \circ f \end{cases}$$

a) P.D.Q. G es biyectiva y $H = G^{-1}$ Teo. de Cálculo de Inversas

[Déjá vu]

Sea $\mathcal{F} = \{f\colon Z \to Z \mid f \text{ es función }\}$ y sea $g \in \mathcal{F}$ una función biyectiva fija. Se definen la funciones $G\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $H\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $G(f) = g \circ f$ y $H(f) = g^{-1} \circ f$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

a) Pruebe que G es biyectiva y demuestre que $H = G^{-1}$.

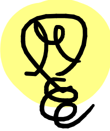
[redacted]

$g : Z \to Z$ biyectiva

$$\left\{ \begin{array}{l} G : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ \quad f \mapsto G(f) = g \circ f \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} H : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ \quad f \mapsto H(f) = g^{-1} \circ f \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Id_* : * \to * \\ \quad x \mapsto Id_*(x) = x \end{array} \right.$$

a) P.D.Q. G es biyectiva y $H = G^{-1}$



Teo. de Cálculo de Inversas

En virtud del Teo., hay que ver 2 de 3 de:

(i) : $G \circ H = Id_{Cod(G)}$

(ii) : $H \circ G = Id_{Dom(G)}$

(iii) : H biyectiva

y * $Dom(H) = Cod(G)$

* $Cod(H) = Dom(G)$

En efecto,

* $Dom(H) = \mathcal{F} = Cod(G)$
* $Cod(H) = \mathcal{F} = Dom(G)$

[Déjá vu]
Sea $\mathcal{F} = \{f\colon Z \to Z \mid f \text{ es función}\}$ y sea $g \in \mathcal{F}$ una función biyectiva fija. Se definen la funciones $G\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $H\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $G(f) = g \circ f$ y $H(f) = g^{-1} \circ f$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

a) Pruebe que G es biyectiva y demuestre que $H = G^{-1}$.

[redacted]

$g\colon Z \to Z$ biyectiva

$$\begin{cases} G\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ f \mapsto G(f) = g \circ f \end{cases} \qquad \begin{cases} H\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ f \mapsto H(f) = g^{-1} \circ f \end{cases}$$

$$\begin{cases} Id_{*}\colon * \to * \\ x \mapsto Id_{*}(x) = x \end{cases}$$

a) P.D.Q. G es biyectiva y $H = G^{-1}$

Teo. de Cálculo de Inversas

En virtud del Teo., hay que ver 2 de 3 de:
- (i): $G \circ H = Id_{Cod(G)}$
- (ii): $H \circ G = Id_{Dom(G)}$
- (iii): H biyectiva

y * $Dom(H) = Cod(G)$
* $Cod(H) = Dom(G)$

(i) Por = de funciones: $Cod(G) = \mathcal{F}$

* $Dom(G \circ H) = Dom(H) = \mathcal{F} = Dom(Id_{Cod(G)})$
* $Cod(G \circ H) = \boxed{Cod(G)} = \mathcal{F} = Cod(Id_{\boxed{Cod(G)}})$
* Sea $f \in \mathcal{F}$. P.D.Q. $(G \circ H)(f) = Id_{\mathcal{F}}(f)$

En efecto, como $f \in \mathcal{F} \Rightarrow f\colon Z \to Z$

$$(G \circ H)(f) = G(H(f)) \underset{\text{def. } H}{=} G(g^{-1} \circ f) \underset{\text{def. } G}{=} g \circ (g^{-1} \circ f) \underset{\text{asoc. } \circ}{=} (g \circ g^{-1}) \circ f = Id_Z \circ f = f = Id_{\mathcal{F}}(f)$$

transit.
$\Rightarrow (G \circ H)(f) = Id_{\mathcal{F}}(f)$ $\square$

[Déjá vu]

Sea $\mathcal{F} = \{f : Z \to Z \mid f$ es función $\}$ y sea $g \in \mathcal{F}$ una función biyectiva fija. Se definen la funciones $G : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $H : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $G(f) = g \circ f$ y $H(f) = g^{-1} \circ f$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

a) Pruebe que G es biyectiva y demuestre que $H = G^{-1}$.

[redacted]

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ biyectiva

$\begin{cases} G : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ f \mapsto G(f) = g \circ f \end{cases}$ $\begin{cases} H : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ f \mapsto H(f) = g^{-1} \circ f \end{cases}$

$\begin{cases} Id_* : * \to * \\ x \mapsto Id_*(x) = x \end{cases}$

a) P.D.Q. G es biyectiva y $H = G^{-1}$

Teo. de Cálculo de Inversas

En virtud del Teo., hay que ver 2 de 3 de:

(i) : $G \circ H = Id_{Cod(G)}$

(ii) : $H \circ G = Id_{Dom(G)}$

(iii) : H biyectiva

y $\; * Dom(H) = Cod(G)$ $\; * Cod(H) = Dom(G)$

(ii) Por $=$ de funciones: $Dom(G) = \mathcal{F}$

$* \, Dom(H \circ G) = Dom(G) = \mathcal{F} \overset{!}{=} Cod(Id_{Dom(G)})$

$* \, Cod(H \circ G) = Cod(H) = \mathcal{F} = Cod(Id_{Dom(G)})$

$Dom(G) = \mathcal{F}$

$*$ Sea $f \in \mathcal{F}$. P.D.Q. $(H \circ G)(f) = Id_{\mathcal{F}}(f)$

En efecto, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y f es función

$(H \circ G)(f) \underset{\text{def. } G}{=} H(G(f)) \underset{\text{def. } H}{=} H(g \circ f) = g^{-1} \circ (g \circ f) \underset{\text{asoc. } \circ}{=} (g^{-1} \circ g) \circ f \underset{\text{prop.}}{=} Id_{\mathbb{Z}} \circ f = f = Id_{\mathcal{F}}(f)$

$\underset{\text{transit.}}{\Longrightarrow} (H \circ G)(f) = Id_{\mathcal{F}}(f)$ $\square$

[Déjá vu]

Sea $\mathcal{F} = \{f : Z \to Z \mid f \text{ es función }\}$ y sea $g \in \mathcal{F}$ una función biyectiva fija. Se definen la funciones $G : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $H : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $G(f) = g \circ f$ y $H(f) = g^{-1} \circ f$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ biyectiva

a) Pruebe que G es biyectiva y demuestre que $H = G^{-1}$.

[redacted]

$\left\{ \begin{array}{l} G : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ \quad f \mapsto G(f) = g \circ f \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} H : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ \quad f \mapsto H(f) = g^{-1} \circ f \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} Id_{*} : * \to * \\ \quad x \mapsto Id_{*}(x) = x \end{array} \right.$

a) P.D.Q. G es biyectiva y $H = G^{-1}$

Teo. de Cálculo de Inversas

En virtud del Teo., hay que ver 2 de 3 de:

(i) : $G \circ H = Id_{Cod(G)}$

(ii) : $H \circ G = Id_{Dom(G)}$

(iii) : H biyectiva

y $*\, Dom(H) = Cod(G)$, $*\, Cod(H) = Dom(G)$

En efecto,

Como se cumple (i) y (ii), y la relación entre Dom y Cod de la directa con la candidata, en virtud del Teo, se concluye que:

G es biyectiva y $H = G^{-1}$ i.e. es su inversa. ■

P_4 b) AUX 7

[Déjá vu]
Sea $\mathcal{F} = \{f : Z \to Z \mid f \text{ es función }\}$ y sea $g \in \mathcal{F}$ una función biyectiva fija. Se definen la funciones $G : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $H : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $G(f) = g \circ f$ y $H(f) = g^{-1} \circ f$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

[redacted]

b) Se define $\mathcal{B} = \{f : Z \to Z \mid f \text{ es biyección }\}$. Muestre que $G^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

1°) qué tipo de = es

↪ = de conjuntos

2°) caracterizar general → particular

b) $\mathcal{B} := \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f \text{ es biyección}\}$. P.D.Q. $G^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$

$$\Leftrightarrow \{x \in \mathrm{Dom}(G) \mid \underline{G(x) \in \mathcal{B}}\} = \mathcal{B}$$

$$\Leftrightarrow \{f \in \mathcal{F} \mid \underline{G(f) \in \mathcal{B}}\} = \mathcal{B}$$

$$\Leftrightarrow \{f \in \mathcal{F} \mid \underline{G(f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ biyectiva}}\} = \mathcal{B}$$

$$\Leftrightarrow \{f \in \mathcal{F} \mid \underline{g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ biyectiva}}\} = \mathcal{B}$$

[Déjá vu]

Sea $\mathcal{F} = \{f\colon Z \to Z \mid f \text{ es función }\}$ y sea $g \in \mathcal{F}$ una función biyectiva fija. Se definen la funciones $G\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $H\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $G(f) = g \circ f$ y $H(f) = g^{-1} \circ f$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

[redacted]

b) Se define $\mathcal{B} = \{f\colon Z \to Z \mid f \text{ es biyección }\}$. Muestre que $G^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

1°) qué tipo de = es

↳ = de conjuntos

2°) caracterizar
general → particular

b) $\mathcal{B} := \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f \text{ es biyección}\}$. P.D.Q. $G^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$

En efecto, por doble inclusión $\iff \{f \in \mathcal{F} \mid g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ biyectiva}\} = \mathcal{B}$

$\supseteq$) Sea $f \in \mathcal{B}$ arbitrario. P.D.Q. $f \in G^{-1}(\mathcal{B}) \iff g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ biyectiva,

pues $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{Z}$
$\mathrm{Cod}(g \circ f) = \mathrm{Cod}(g) = \mathbb{Z}$

En efecto, como $f \in \mathcal{B} \iff f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ biyectiva.

Luego, g biyectiva, f biyectiva $\overset{\text{prop.}}{\Longrightarrow}$ $g \circ f$ biyectiva!, y $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Sigue que $f \in G^{-1}(\mathcal{B})$. $\square$

[Déjá vu]
Sea $\mathcal{F} = \{f\colon Z \to Z \mid f \text{ es función }\}$ y sea $g \in \mathcal{F}$ una función biyectiva fija. Se definen la funciones $G\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $H\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $G(f) = g \circ f$ y $H(f) = g^{-1} \circ f$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

a) Pruebe que G es biyectiva y demuestre que $H = G^{-1}$.

b) Se define $\mathcal{B} = \{f\colon Z \to Z \mid f \text{ es biyección }\}$. Muestre que $G^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

1°) qué tipo de = es
↪ = de conjuntos

2°) caracterizar
general → particular

b) $B := \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f \text{ es biyección}\}$. P.D.Q. $\underbrace{G^{-1}(B)}_{H(B)} = B$

En efecto, por doble inclusión $\iff \{f \in \mathcal{F} \mid g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ biyectiva}\} = B$

$\subseteq$ Sea $f \in G^{-1}(B)$. P.D.Q. $f \in B \iff f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ biyección.

En efecto,
Como $f \in G^{-1}(B)$, f es t.q. $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ biyectiva ↗ $g \circ f$ iny $\Rightarrow$ f es iny

[Déjá vu]

Sea $\mathcal{F} = \{f : Z \to Z \mid f$ es función $\}$ y sea $g \in \mathcal{F}$ una función biyectiva fija. Se definen la funciones $G : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $H : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $G(f) = g \circ f$ y $H(f) = g^{-1} \circ f$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

a) Pruebe que G es biyectiva y demuestre que $H = G^{-1}$.

b) Se define $\mathcal{B} = \{f : Z \to Z \mid f$ es biyección $\}$. Muestre que $G^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

1°) qué tipo de = es

↪ = de conjuntos

2°) caracterizar general → particular

b) $\mathcal{B} := \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f$ es biyección$\}$. P.D.Q. $\underbrace{G^{-1}}_{H}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$

$\iff \{y \in Cod(H) \mid (\exists x \in \mathcal{B}) : H(x) = y\} = \mathcal{B}$

$\iff \{f \in \mathcal{F} \mid (\exists h \in \mathcal{B}) : H(h) = f\} = \mathcal{B}$

$\iff \{f \in \mathcal{F} \mid (\exists h \in \mathcal{B}) : g^{-1} \circ h = f\} = \mathcal{B}$

$\iff \{f \in \mathcal{F} \mid (\exists h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ biyectiva$) : \underset{\text{biy}}{g^{-1}} \circ \underset{\text{biy}}{h} = f\} = \mathcal{B}$

En efecto, por doble inclusión

$\subseteq]$ Sea $f \in H(\mathcal{B})$.

P.D.Q. $f \in \mathcal{B} \iff f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ biyección.

En efecto,

Como $f \in H(\mathcal{B})$ i.e. $f = \underset{\text{biy}}{g^{-1}} \circ \underset{\text{biy}}{h}$, algún $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ biyectiva

$\Rightarrow f$ es biyectiva y $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \iff f \in \mathcal{B}$. ☒

$\circ$ de biy. es biy

$Dom(g^{-1} \circ h) = Dom(h) = \mathbb{Z}$

$Cod(g^{-1} \circ h) = Cod(g^{-1}) = \mathbb{Z}$

$\therefore G^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ ☒

P_5 a) AUX 7

$$\sum_{i=p_0}^{p_e} a_i \equiv \sum_{i \in y} a$$

$$y = [p_0, p_e]$$

$p_e \geq p_0$

límite superior del índice

$$\sum_{\square = \bigcirc}^{\star} \triangle$$

forma de la secuencia

índice

valor inicial del índice

$$\bigcirc \leq \square \leq \star$$

* $$\sum_{i\in Y} a_i = \sum_{j\in J} a_j - \sum_{k\in K} a_k$$ separaç de índices

$Y = J \setminus K$

* $$\sum_{i=0}^{n} k = \sum_{i=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$ Suma de Gauss

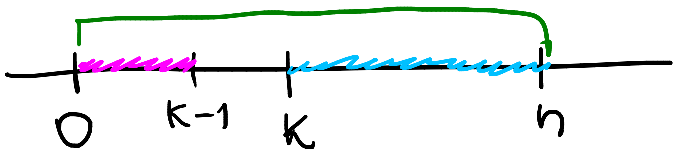
* $$\sum_{i=n_0}^{n} q^i = q^{n_0}\,\frac{q^{(n-n_0+1)}-1}{q-1}$$ Geométrica (Regalo ☺)

$q \neq 1$

$n_0 = 0$ es la popu

$0 \leq k \leq n$

Para $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, calcule $\sum_{i=k}^{n} (3^{i-1} + 2i)$.



$$[k,n] = [0,n] \setminus [0,k-1]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (3^{i-1} + 2i) - \sum_{i=0}^{k-1} (3^{i-1} + 2i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} 3^{i-1} + \sum_{i=0}^{n} 2i - \left(\sum_{i=0}^{k-1} 3^{i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} 2i \right) \quad \ldots \quad \sum + = \sum + \sum$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n} 3^{i} + 2 \sum_{i=0}^{n} i - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{k-1} 3^{i} - 2 \sum_{i=0}^{k-1} i \quad \ldots \quad \sum \beta \cdot = \beta \sum \cdot$$

$$= \frac{1}{3} \left(\cancel{3^0}^{\,1} \cdot \frac{3^{\cancel{n-0+1}\; n+1} - 1}{\cancel{3-1}\; 2} \right) + \cancel{2} \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - \frac{1}{3} \left(\cancel{3^0}^{\,1} \cdot \frac{3^{\cancel{k-1-0+1}\; k} - 1}{\cancel{3-1}\; 2} \right) - \cancel{2} \frac{k-1 \cdot [(k-1)+1]}{\cancel{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{2} + n(n+1) - \frac{1}{3} \frac{3^{k} - 1}{2} - (k-1)k$$

$$= \frac{1}{6} \left(3^{n+1} - 3^{k} \right) + n(n+1) - (k-1)k \quad //$$

P_5 b) AUX 7

* $$\sum_{i=n_0}^{n} 1 = (n-n_0+1)$$

* $$\sum_{i=0}^{n} k = \sum_{i=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$ Suma de Gauss

$$\sum_{i=N}^{M} (ai+b) = \frac{M-N+1}{2}(aN+b+aM+b)$$

* $$\sum_{i=n_0}^{n} q^i = q^{n_0}\,\frac{q^{(n-n_0+1)}-1}{q-1}$$ Geométrica (Regalo :))

$q \neq 1$

$n_0 = 0$ es la popu

$n \geq j \geq 1$ y $n \geq k \geq 1$

$$\frac{a-b}{-c} = \frac{b-a}{c}$$

Considere $j, k \in \mathbb{N}$, con $n \geq j, k \geq 1$. Calcule la suma $a_j := \sum_{k=1}^{n} \frac{3^j\,(k+1)}{2^{2j-1}}$ y luego calcule la suma $\sum_{j=1}^{n} a_j$.

$$* \; a_j := \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{3^j}{2^{2j-1}}}_{=:\beta}(k+1) \overset{\beta \neq \beta(k)}{=} \beta \sum_{k=1}^{n} (k+1) \overset{\sum + = + \sum}{=} \beta \sum_{k=1}^{n} k + \beta \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \beta \frac{n(n+1)}{2} + \beta (n-1+1) = \beta \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \beta \left(\frac{n(n+3)}{2} \right) \quad //$$

$$* \; \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} \beta \frac{n(n+3)}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{3^j}{2^{2j-1}} \underbrace{\frac{n(n+3)}{2}}_{=:\mu} \overset{\mu \neq \mu(j)}{=} \mu \sum_{j=1}^{n} \frac{3^j}{2^{2j-1}} = \mu \sum_{j=1}^{n} \frac{3^j}{2^{2j} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= 2\mu \sum_{j=1}^{n} \frac{3^j}{(2^2)^j} = 2\mu \sum_{j=1}^{n} \frac{3^j}{4^j} = 2\mu \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^j = 2\mu \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n \, \cancel{-1+1}} - 1}{\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right) - 1}_{= -\frac{1}{4}}}$$

$$= 8\mu \left(\frac{3}{4}\right) \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 8 \, \frac{n(n+3)}{2} \left(\frac{3}{4}\right) \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \quad \blacksquare$$

$n \geq j \geq 1$ y $n \geq k \geq 1$

Considere $j, k \in \mathbb{N}$, con $n \geq j, k \geq 1$. Calcule la suma $a_j := \sum_{k=1}^{n} \frac{3^j (k+1)}{2^{2j-1}}$ y luego calcule la suma $\sum_{j=1}^{n} a_j$.

$$\frac{a-b}{-c} = \frac{b-a}{c}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^j (k+1)}{2^{2j-1}}}$$

#shook

P_5 c) AUX 7

$*$ $\displaystyle\sum_{i=n_0}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_{n_0} - a_{n+1}$

Telescópica

$*$ $\displaystyle\sum_{i=n_0}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_{n_0}$

Calcule, para $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la sumatoria $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$.

fracciones parciales : $\dfrac{2}{k(k+2)} \overset{!}{=} \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2}$, $a, b \in \mathbb{R}$ (encontrar a y b)

$\Rightarrow 2 = a(k+2) + kb$

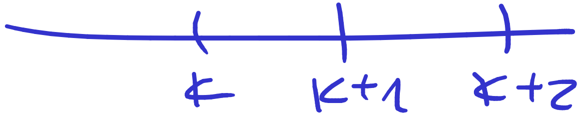
$\Rightarrow 2 = (a+b)k + 2a \Leftrightarrow 0 + 2 = (a+b)k + 2a$

$\Rightarrow a+b=0$ y $a=1$

$\Rightarrow b=-1$ y $a=1$

$\therefore \dfrac{2}{k(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2} = \dfrac{k+2-k}{k(k+2)} = \dfrac{2}{k(k+2)}$

Calcule, para $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la sumatoria $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$.

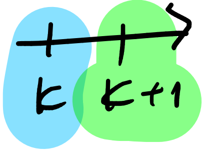


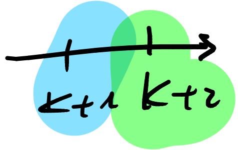
$$\therefore \quad \frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \overbrace{- \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1}}^{=0} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$\sum + = + \sum$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$





$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad \blacksquare$$

P_5 d) AUX 7

$\sum \begin{cases} 1°) \text{ índice!!} \\ 2°) \text{ acomodar a } \sum \text{ conocidas} \\ 3°) \text{ Historia} \end{cases}$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $(\forall\, x,y\in\mathbb{R}^+): f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$. Muestre que $\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{1}{i}\right)=f(n+1)$.

En efecto,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{1}{i}\right)=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i+1}{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[f(i+1)-f(i)\right]=f(n+1)-f(1)$$

sumar fracciones

$i>0$
$\Rightarrow i+1>0$

Pero $f(1)=0$ ... porque para $x\in\mathbb{R}_+$, $f\left(\frac{x}{x}\right)=f(x)-f(x)\Leftrightarrow f(1)=0$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{1}{i}\right)=f(n+1).$$

Q.E.D.

En este auxiliar repasamos todo funciones!!

Así que espero que les sirva como preparación para su estudio!

Cualquier duda me la pueden comunicar :)

¡Ánimo!

este diso
es MUY bueno!!