

DESARROLLO P A R C I A L AUX 6

FUNCIONES Y SUS CARACTERÍSTICAS

MA1101-5
2025-1

Profesores: Jorge Aguayo A. y Hanne Van Den Bosch
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

AUX 6: Funciones y sus características

$$\mathcal{F} = \{h: E \rightarrow E \mid h \text{ es biyectiva}\} \text{ y } f \in \mathcal{F}$$

↑ funciones biyectivas

$$\text{P.D.Q. } (\forall h \in \mathcal{F}): h \circ f \in \mathcal{F}$$

Hay varias formas de justificarlo.

En 1º instancia, la composición está bien definida porque los dominios son iguales.

(i) composición de inyectivas, epyectivas e inyectiva, epyectiva
 $\Rightarrow$ composición de biyectivas es biyectiva.

Luego, como h, f son biyectivas $\Rightarrow h \circ f$ es biyectiva
 $\Rightarrow h \circ f \in \mathcal{F}$

Obs.: Hacerlo por def es demostrar la propiedad.

(ii) Como $f, h \in \mathcal{F} \Rightarrow f, h$ biyectivas $\Rightarrow \exists f^{-1}, h^{-1} \text{ t. q. } f \circ f^{-1} = I_E = f^{-1} \circ f$
 $g \circ g^{-1} = I_E = g^{-1} \circ g$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } (f^{-1} \circ h^{-1}) \circ (h \circ f) &= f^{-1} \circ (h^{-1} \circ h) \circ f \\ &= f^{-1} \circ I_E \circ f \\ &= f^{-1} \circ f = I_E \end{aligned}$$

comp. por izq
es identidad
del dominio

$$(h \circ f) \circ (f^{-1} \circ h^{-1}) \stackrel{\text{análogo}}{=} h \circ h^{-1} = I_E$$

comp. por der.
es identidad
del codominio.

↗ Luego, por Teo. Cálculo de inversa, $h \circ f$ tiene inversa

idea: $h^{-1} \circ f^{-1}$ candidata a inversa $(\Rightarrow h \circ f \text{ es biyectiva} \Rightarrow h \circ f \in \mathcal{F})$

$$\varphi_f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$$

$$h \mapsto \varphi_f(h) = h \circ f$$

P.D.D. φ_f es biyectiva

(i) Def: $\text{biy} \Leftrightarrow \text{iny} \wedge \text{epi}$

iny P.D.D. $(\forall h_1, h_2 \in \text{Dom}(\varphi_f)): \varphi_f(h_1) = \varphi_f(h_2) \Rightarrow h_1 = h_2$

Sean $h_1, h_2 \in \text{Dom}(\varphi_f) = \mathcal{F}$ i.e. $h_1, h_2: E \rightarrow E$ biyectivas, t.g.

$$\varphi_f(h_1) = \varphi_f(h_2) \Leftrightarrow (h_1 \circ f) = (h_2 \circ f) \quad \text{Ej. 6: igualdad de funciones}$$

Se quiere ver que $h_1 = h_2$.

Como f es biyectiva $\Rightarrow$ existe $f^{-1}: E \rightarrow E$ t.g. $f \circ f^{-1} = \text{Id}_E = f^{-1} \circ f$

$$\Rightarrow h_1 \circ f = h_2 \circ f \quad / \quad \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow h_1 \circ (f \circ f^{-1}) = h_2 \circ (f \circ f^{-1})$$

$$\Leftrightarrow h_1 \circ \text{Id}_E = h_2 \circ \text{Id}_E \quad \text{porque es la composición del dominio}$$

$$\Leftrightarrow h_1 = h_2 \quad \because \varphi_f \text{ es iny} \quad \square$$

epi P.D.D. $(\forall g \in \text{Cod}(\varphi_f)) (\exists h \in \text{Dom}(\varphi_f)): \varphi_f(h) = g$

Sea $g \in \text{Cod}(\varphi_f) = \mathcal{G}$ i.e. $g: E \rightarrow E$ biyectiva.

Se quiere hallar $h \in \text{Dom}(\varphi_f) = \mathcal{F}$ t.g. $\varphi_f(h) = g$.

En efecto,

Si tomara h t.g. $\boxed{g \circ f^{-1}}$

$$\left[\text{Pues } \varphi_f(h) = g \Leftrightarrow h \circ f = g \underset{\substack{\circ f^{-1} \\ \exists \text{ pues } f \in \mathcal{F}}}{\Leftrightarrow} h \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ f^{-1} \Leftrightarrow h \circ \text{Id}_E = g \circ f^{-1} \Leftrightarrow h = g \circ f^{-1} \right]$$

Ya que $\varphi_f(g \circ f^{-1}) = (g \circ f^{-1}) \circ f = g \circ (f^{-1} \circ f) = g \circ \text{Id}_E = g \quad \because \varphi_f \text{ es epi} \quad \square$

A, B, C conjuntos no vacíos.

$\circ$ iny. $\Rightarrow$ 1º iny.
 $\circ$ sobre. $\Rightarrow$ 1º sobrepi.

$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow A$ f.g.

$$\begin{cases} h \circ g \circ f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow h \circ (g \circ f) \text{ inyectiva} \Rightarrow g \circ f \text{ inyectiva} \Rightarrow \boxed{f \text{ inyectiva}} \\ f \circ h \circ g \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow f \circ (h \circ g) \text{ inyectiva} \Rightarrow h \circ g \text{ inyectiva} \Rightarrow \boxed{g \text{ inyectiva}} \\ g \circ f \circ h \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow (g \circ f) \circ h \text{ sobre} \Rightarrow g \circ f \text{ sobre} \Rightarrow \boxed{g \text{ sobre}} \end{cases}$$

P.D.Q. f, g, h son biyectivas

Como g es iny. y sobre $\Rightarrow$ g es biyectiva
 $\Rightarrow \exists g^{-1}$ biyectiva.

Como $g \circ f$ es iny. y sobre. $\Rightarrow (g \circ f)$ es biyectiva
 $\Rightarrow \exists (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ biyectiva,

Composic de biy. es biy. $\Rightarrow g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f \stackrel{\text{prop.}}{=} \text{Id}_B \circ f$
 $\Rightarrow \underbrace{f}_{\text{biyectiva}} \text{ es biyectiva}$
 $\stackrel{\text{prop.}}{\uparrow} f$

Composic de iny. es iny. $\Rightarrow \underbrace{(h \circ g)}_{\text{iny.}} \circ g^{-1} = h \circ (g \circ g^{-1}) = h \circ \text{Id}_C = h$
 $\Rightarrow h \text{ iny.}$

Composic de sobre es sobre. $\Rightarrow \underbrace{(g \circ f)^{-1}}_{\text{sobre}} \circ (g \circ f) \circ h = \text{Id}_A \circ h = h$
 $\Rightarrow h \text{ es sobre.}$
 $\circ \underbrace{h}_{\text{biy.}}$

$f: X \rightarrow Y$ función.

carácter: $f(X) = Y$

P.D.Q. $f(f^{-1}(B)) = B \ (\forall B \subseteq Y) \Leftrightarrow f$ sobre.

$\Rightarrow$ Se sabe que $f(f^{-1}(B)) = B \ (\forall B \subseteq Y)$

P.D.Q. f es sobre.

Notar que $Y \subseteq Y \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) = Y$; $f^{-1}(Y) = X$

o sea que $f(X) = Y \Leftrightarrow f$ sobre. def. función

$\Leftarrow$ Supongamos f sobre.

Se quiere ver que $(\forall B \subseteq Y) : f(f^{-1}(B)) = B$

Sea $B \subseteq Y$.
Por doble inclusión.

$\subseteq$ $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ siempre. $\longrightarrow$

$\supseteq$ Sea $b \in B$. Como $B \subseteq Y = \text{Cod}(f)$ y f sobre:

$$\begin{aligned} (\exists x \in X) : f(x) = b &\Rightarrow x \in f^{-1}(B) \\ &\Rightarrow b \in f(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

Luego $B \subseteq f(f^{-1}(B))$

$\left\{ \begin{aligned} \text{Sea } y \in f(f^{-1}(B)) \\ &\Rightarrow (\exists x \in f^{-1}(B)) : \\ &\quad f(x) = y. \\ &\Rightarrow y \in B \\ &\text{y } f(x) = y, \\ &\quad \text{algun } x. \\ &\Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subseteq B \end{aligned} \right.$

este ejercicio es para aprender que a veces podemos "forzar" a que las cosas sean como queremos, al suponer que sean de lo contrario.

claver: $x \in f^{-1}(\text{algo})$

$$\Leftrightarrow f(x) \in \text{algo}$$

$y \in \text{algo}$

$$\Leftrightarrow f(x) \in f(\text{algo})$$

mathematically speaking!

P.D.Q. f *injectiva* $\Rightarrow f(A \setminus C) = f(A) \setminus f(C)$ ($\forall A, C \subseteq X$)

Supóngase que f es *inyectiva*

P.D.Q. ($\forall A, C \subseteq X$): $f(A \setminus C) = f(A) \setminus f(C)$

Sean $A, C \subseteq X$.

Por doble inclusión:

$\subseteq$ P.D.Q. $f(A \setminus C) \subseteq f(A) \setminus f(C)$

Sea $w \in f(A \setminus C)$.

$$\Leftrightarrow w \in f(A \cap C^c)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A \cap C^c): f(x) = w$$

Como $x \in A \cap C^c \subseteq A \Rightarrow x \in A$

$$\Rightarrow f(x) \in f(A)$$

$$\Rightarrow w \in f(A)$$

Como $x \in A \cap C^c \subseteq C^c \Rightarrow x \in C^c$

Supóngase que $f(x) \in f(C)$

$$\Leftrightarrow w \in f(C)$$

Entonces $(\exists \bar{x} \in C): f(\bar{x}) = w$.

Como f *inyectiva* $\Rightarrow f(\bar{x}) = w = f(x)$

$$\Rightarrow \bar{x} = x$$

pero $x \in C^c$
 $\bar{x} \in C$
 $\text{y } C^c \cap C = \emptyset$.

Luego, $f(x) \notin f(C) \Leftrightarrow w \notin f(C)$

Luego que $w \in f(A) \setminus f(C)$. $\square$

P.D.Q. $f(A) \setminus f(C) \subseteq f(A \setminus C)$

Sea $w \in f(A) \setminus f(C)$

$$\Leftrightarrow w \in f(A) \wedge w \notin f(C)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A): f(x) = w$$

Si $x \notin C$, ganamos!

Supóngase que $x \in C$,

$$\Rightarrow f(x) \in f(C)$$

$$\Rightarrow w \in f(C)$$

pero $f \notin f(C)$.

Necesaria $x \notin C \Leftrightarrow x \in C$.

Luego, $(\exists x \in A \setminus C): f(x) = w$

$$\Leftrightarrow w \in f(A \setminus C). \quad \square$$

P.D.Q. $f(A)^c \subseteq f(A^c)$ ($\forall A \subseteq X$) si f es sobre.

Supóngase que f es sobre.

P.D.Q. ($\forall A \subseteq X$): $f(A)^c \subseteq f(A^c)$.

Sea $A \subseteq X$.

Sea $w \in f(A)^c \subseteq Y$.

Como f es sobre, $(\exists x \in X) : f(x) = w$.

[Quisiéramos que $x \in A^c$ pues entonces $f(x) \in f(A^c) \Rightarrow w \in f(A^c)$.]

Supóngase que $x \notin A^c \Rightarrow x \in A$
 $\Rightarrow f(x) \in f(A)$
 $\Rightarrow w \in f(A)$

$\nearrow$ ~~x~~
 $\uparrow$ pues $w \in f(A)^c$.

Luego, $x \in A^c \Rightarrow f(x) \in f(A^c)$
 $\Rightarrow w \in f(A^c)$.

Segue que $f(A)^c \subseteq f(A^c)$. $\square$

f sobre. P.D. Q. $f(A)^c = f(A^c) \quad (\forall A \subseteq X) \Leftrightarrow f$ inyectiva.

Por doble implicancia.

$\Rightarrow$ | Supongamos que $(\forall A \subseteq X): f(A)^c = f(A^c)$.

P.D. Q. f es inyectiva.

$\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X): x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Sean $x_1, x_2 \in X$ t. q. $x_1 \neq x_2$.

Por (2), $f(\{x_1\})^c = f(\{x_1\}^c)$

$$= \{f(x) \mid x \in \{x_1\}^c\}$$

$$= \{f(x_1)\}^c$$

O sea $\{f(x_1)\}^c = f(\{x_1\}^c)$. Como $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_2 \in \{x_1\}^c$.

$$\Rightarrow f(x_2) \in f(\{x_1\}^c)$$

$$\Rightarrow f(x_2) \notin \{f(x_1)\}^c$$

$$\Rightarrow f(x_2) \notin \{f(x_1)\}$$

$$\Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1) //$$

$\therefore f$ es inyectiva. $\square$

$\Leftarrow$ Sea f injectiva.

$$\text{P.D.Q. } (\forall A \subseteq X): f(A)^c = f(A^c).$$

Por doble inclusión:

$$\subseteq \quad \text{Como } f \text{ es sobreyectiva, por parte anterior, } f(A)^c \subseteq f(A^c). \quad \square$$

$$\supseteq \quad \text{P.D.Q. } f(A^c) \subseteq f(A)^c$$

$$\text{Sea } w \in f(A^c) \Rightarrow (\exists x \in A^c): w = f(x)$$

$$\text{P.D.Q. } w \in f(A)^c.$$

$$\text{Supóngase que } w \in f(A) \Rightarrow (\exists \bar{x} \in A): w = f(\bar{x}).$$

$$\text{Luego } f(\bar{x}) = w = f(x) \xRightarrow{\substack{\text{f. inj.} \\ \nearrow \text{pues } x \in A^c, \bar{x} \in A \\ \text{y } A^c \cap A = \emptyset.}} \bar{x} = x$$

Necesariamente $w \in f(A)^c$.

$$\text{Lígue que } f(A^c) \subseteq f(A)^c. \quad \square$$



Ni más, ni menos 8)

Las funciones son mas objetos MUY bacanes!!
Con aplicaciones en muchísimos campos. ☺

Si tienen dudas, pueden contactarme!

Éxito en su estudio,

