

Auxiliar 6

Funciones y sus características

Profesores: Jorge Aguayo A. y Hanne Van Den Bosch

Auxiliar: Bianca Zamora Araya

Fecha: 28 de abril de 2025

P1. [Aterrizando]

Sean A, B dos conjuntos fijos cualquiera. Considere la función
$$\begin{cases} H: & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \\ & (X, Y) \mapsto f((X, Y)) = X \cup Y \end{cases}$$

- Demuestre que H es sobreyectiva.
- Suponga que $A \cap B = \emptyset$ y muestre que H es inyectiva.
- Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$, ¿ H es inyectiva? Justifique.

P2. [Un paso más]

Sea E un conjunto de referencia no vacío y sea $B_0 \subseteq E$ fijo. Considere la función

$$\begin{cases} \mathcal{F}: & \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ & X \mapsto \mathcal{F}(X) = (X \setminus B_0, X \cap B_0) \end{cases}$$

¿ $\mathcal{F}$ es inyectiva? ¿y sobreyectiva? Argumente sobre su biyectividad. Justifique todos sus pasos.

P3. [Déjà vu]

Considere un conjunto de referencia Z no vacío y A un subconjunto no vacío. Se definen las funciones:

$$\begin{cases} f: & \mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(Z) \\ & X \mapsto f(X) = X \setminus A \end{cases} \quad \begin{cases} g: & \mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(Z) \\ & X \mapsto g(X) = X \cup A \end{cases}$$

- Demuestre que $f \circ g = f$ y que $g \circ f = g$.
- Muestre que $f^{-1}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(A)$ y que $(\forall X \in \mathcal{P}(Z)) : f(X) \neq A$.

P4. [Composición]

Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos. Sean $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ y $h: C \rightarrow A$ tales que

$$h \circ g \circ f \text{ es inyectiva, } f \circ h \circ g \text{ es inyectiva, y } g \circ f \circ h \text{ es sobreyectiva}$$

Demuestre que f, g y h son biyectivas.

P5. [Phi]

Sea $\mathcal{F} = \{h: E \rightarrow E \mid h \text{ es biyectiva}\}$ y sea $f \in \mathcal{F}$. a) Pruebe que para todo $h \in \mathcal{F}$, se tiene que $h \circ f \in \mathcal{F}$.

b) Sea $\varphi_f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\varphi_f(h) = h \circ f$. Demuestre que φ_f es biyección.

P6. [Fotos]

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Demuestre las siguientes propiedades.

- $(\forall B \subseteq Y) : f(f^{-1}(B)) = B \iff f$ es sobreyectiva.
- Si f es inyectiva, entonces $f(A \setminus C) = f(A) \setminus f(C)$ ($\forall A, C \subseteq X$).
- $f(A)^c \subseteq f(A^c)$ ($\forall A \subseteq X$) si f es sobreyectiva.
- Si f es sobreyectiva, entonces $(\forall A \subseteq X) : f(A)^c = f(A^c) \iff f$ es inyectiva.

Principales definiciones y propiedades

- **[Función]:** Corresponde a una asociación unívoca entre los elementos de un conjunto y de otro. Para A, B conjuntos en Z , se define una función $f := (A, B, G)$:

$$G \subseteq A \times B \wedge (\forall a \in A) (\exists! b \in B) : (a, b) \in G$$

Para una función $f: A \rightarrow B$, los conjuntos A, B, G , denotados $\text{Dom}(f)$, $\text{Cod}(f)$, G_f , se denominan **dominio** (o conjunto de **partida**), **codominio** (o conjunto de **llegada**) y grafo de la función, respectivamente. La notación $f(a) = b$ denota que $f(a)$ es la etiqueta para el único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$.

- **[Igualdad de funciones]:** Dos funciones son iguales si lo son en dominio, codominio y grafo.
- **[Inyectividad]:** Asegura que un elemento en el codominio se asocia a un y solo un elemento del dominio. $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si y solo si

$$(\forall a_1, a_2 \in A) : f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

Para mostrar que una función **no es inyectiva**, basta exhibir dos elementos del dominio diferentes pero que tengan igual imagen.

- **[Sobreyectividad/epiyectividad]:** Asegura que cualquier elemento del codominio es imagen de alguien del dominio (podría ocurrir diferentes elementos del dominio lleven a la misma imagen). $f: A \rightarrow B$ es epiyectiva si y solo si

$$(\forall b \in B) (\exists a \in A) : f(a) = b$$

Para ver que una función **no es epiyectiva**, basta exhibir un elemento del codominio que no sea imagen de ningún elemento del dominio.

- **[Biyectividad]:** Asegura que cada elemento de la partida tiene un único elemento en la llegada (inyectividad) y que cada elemento de la llegada está asociado con algún elemento de la partida (epiyectividad). $f: A \rightarrow B$ es biyectiva si y solo si f es inyectiva y epiyectiva a la vez si y solo si

$$(\forall b \in B) (\exists! a \in A) : f(a) = b$$

- **[Conjunto de funciones]:** Para A, B conjuntos, se define el conjunto de todas las funciones de A en B :

$$B^A := \{f: A \rightarrow B \mid f \text{ es función}\}$$

- **[Función inversa]:** Es una función que realiza lo “opuesto” a una función fija. $f: A \rightarrow B$ es función biyectiva si y solo si $g := f^{-1}: B \rightarrow A$ es función, donde g corresponde a la función inversa de f , vale decir, $g(y) = x$ cada vez que $f(x) = y$ para $x \in A$ e $y \in B$:

$$(\forall a \in A) (\forall y \in B) : b = f(a) \iff f^{-1}(b) = a$$

Se cumple que:

$$(\forall a \in A) : f^{-1}(f(a)) = a \wedge (\forall b \in B) : f(f^{-1}(b)) = b$$

- Sea $f: A \rightarrow B$ una función biyectiva. Entonces: f^{-1} biyectiva y $(f^{-1})^{-1} = f$.

- **[Función composición]:** Es una función que, dadas dos funciones, recibe los elementos del dominio de una, y entrega la imagen por la otra, de la imagen de la una. Para $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ funciones, la composición de f y g es la función $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que

$$(\forall a \in A) : (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

La condición de igualdad de dominios se puede relajar a que el dominio de la primera función en la composición esté contenido en el dominio de la última función de la composición.

- Sea $f: A \rightarrow B$ una función biyectiva. Entonces: $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)} \wedge f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\text{Cod}(f)}$.
- $\circ$ es asociativa (¡no conmuta!)
- $\text{Id}_{\text{Cod}(f)} \circ f = f \wedge f \circ \text{Id}_{\text{Dom}(f)} = f$.
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- Composición de inyectivas, epiyectivas, biyectivas, es inyectiva, epiyectiva y biyectiva, respect.
- Si composición es inyectiva, entonces la primera función compuesta es inyectiva.
- Si composición es epiyectiva, entonces la última función compuesta es epiyectiva.

- **[Cálculo de inversas]:** Sean $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ funciones. Basta ver que se cumplan dos cualesquiera de las siguientes condiciones, para que f sea biyectiva y g su inversa:

$$g \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}, \quad f \circ g = \text{Id}_{\text{Cod}(f)}, \quad g \text{ es biyectiva}$$