Auxiliar 5

Producto cartesiano, conjunto potencia y funciones

Profesor: Jorge Aguayo A.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 21 de abril de 2025

P1. [Producto]
Sean A, B, C conjuntos. Pruebe que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A \times B = B \times A \iff A = \emptyset \vee A = B \vee B = \emptyset$. **b)** $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

P2. [Potente]
Sea Z un conjunto no vacío y sean $A, B \subseteq Z$. Demuestre que:

a) $A \cap B = \emptyset \iff \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.
b) Si se tiene $(\forall\, X, Y \in \mathcal{P}(Z)) : A \cup X = A \cup Y \implies X = Y$ entonces $A = \emptyset$.

P3. [Identidad]
Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se define la función $f_{\alpha,\beta} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x + \beta$. Se define además el conjunto $\mathcal{G} := \{f_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$. Pruebe que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ pertenece a $\mathcal{G}$.

P4. [¿Iguales?]
Considere un conjunto de referencia Z no vacío y A un subconjunto no vacío. Se definen:

$$\begin{cases} f\colon & \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z) \\ & X \mapsto f(X) = X \setminus A \end{cases} \qquad \begin{cases} g\colon & \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z) \\ & X \mapsto g(X) = X \cup A \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\colon & \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z) \\ & X \mapsto F(X) = (X \cup A) \setminus A \end{cases} \qquad \begin{cases} G\colon & \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z) \\ & X \mapsto G(X) = (X \setminus A) \cup A \end{cases}$$

a) Demuestre que cada una de las asociaciones están bien definidas como funciones.
b) Demuestre que $F = f$ y que $G = g$.

P5. [Apareció Descartes]
Sean A, B dos conjuntos fijos cualesquiera. Se define $\begin{cases} J\colon & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A \cup B) \\ & (X, Y) \mapsto J((X, Y)) = X \cup Y \end{cases}$.

Demuestre que J es función.

P6. [Otra inmersión]
Sea Z un conjunto de referencia no vacío y $A \in \mathcal{P}(Z)$. Considere $\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{P}(Z) \mid A \cap B = \emptyset\}$. Pruebe que:

a) $\emptyset \in \mathcal{M}_A$ y que $A^c \in \mathcal{M}_A$.
b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes: **i)** $A \in \mathcal{M}_A$, **ii)** $A = \emptyset$, **iii)** $\mathcal{M}_A = \mathcal{P}(Z)$.
Además, indique para cuál(es) $A \subseteq Z$ se tiene que $\mathcal{M}_A = \{\emptyset\}$. Justifique.
c) $(\forall\, B \in \mathcal{M}_A)\,(\forall\, Y \in \mathcal{P}(Z)) : B \cap Y \in \mathcal{M}_A$.
d) Si $B, C \in \mathcal{M}_A$ entonces $B \Delta C \in \mathcal{M}_A$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Par ordenado]**: También denominado **2-tupla**, corresponde a un objeto que distingue el orden de dos elementos. Para a, b en los conjuntos de referencia A y B, respectivamente, se define el par ordenado de a y b como el conjunto $(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}$, denominándose **primera** y **segunda** componente, respectivamente.
  - **[Igualdad de pares ordenados]**: Dos pares ordenados son iguales si lo son coordenada a coordenada (y si se trabaja en el mismo conjunto):
  $$(\forall\, a_1, a_2 \in A)\,(\forall\, b_1, b_2 \in B) :$$
  $$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$
  - **[n-tuplas]**: Es la extensión de la noción de 2-tuplas a una colección de tamaño n donde la i-ésima coordenada vive en el i-ésimo conjunto. Se mantiene la propiedad de igualdad.
- **[Producto cartesiano]**: Corresponde al conjunto de pares ordenados. Para $A \subseteq Z_A$, $B \subseteq Z_B$, con $Z_\cdot$ conjunto de referencia, se define el producto cartesiano:
  $$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$
  Esto se puede extender para una familia de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, con $A_i \subseteq Z_i\ (\forall\, i \leq n)$, tal que:
  $$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\ (\forall\, i \leq n)\}$$
  El producto cartesiano también se denota por $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Si $A_i = A\ (\forall\, i \leq n)$, entonces se anota A^n.
  - **[Producto cartesiano no conmuta]**. Ojito.
  - **[Propiedades]**: Para $A, B \subseteq Z$ y $X, Y \subseteq U$:
    - $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times X$.
    - $A \subseteq B \wedge X \subseteq Y \implies A \times X \subseteq B \times Y$.
    - $(A \times X) \cap (B \times Y) = (A \cap B) \times (X \cap Y)$.
    - $(A \times X) \cup (B \times Y) \subseteq (A \cup B) \times (X \cup Y)$.
    - Se tiene que $\times$ distribuye con respecto a $\cap$ y $\cup$ por la derecha y por la izquierda.
- **[Conjunto potencia, o "de las partes"]**: Corresponde al conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto. Para $A \subseteq Z$, con Z el conjunto de referencia, se define el conjunto de las partes de A por:
  $$\mathcal{P}(A) := \{X \subseteq Z \mid X \subseteq A\}$$
  - $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ siempre.
  - O sea... ¡el conjunto potencia nunca es vacío!
  - Sea $B \subseteq Z$. Entonces:
    - $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
    - $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
- **[Función]**: Corresponde a una asociación unívoca entre los elementos de un conjunto y de otro. Para A, B conjuntos en Z, se define una función $f := (A, B, G)$:
  $$G \subseteq A \times B \wedge (\forall\, a \in A)\,(\exists!\, b \in B) : (a,b) \in G$$
  Para una función $f \colon A \to B$, los conjuntos A, B, G, denotados $\mathrm{Dom}(f), \mathrm{Cod}(f), G_f$, se denominan **dominio** (o conjunto **de partida**), **codominio** (o conjunto de **llegada**) y grafo de la función, respectivamente. La notación $f(a) = b$ denota que $f(a)$ es la etiqueta para el único elemento $b \in B$ tal que $(a,b) \in G$.
  - **[Igualdad de funciones]**: Dos funciones son iguales si lo son en dominio, codominio y grafo (¡igualdad de tuplas!).
- **[Conjunto de funciones]**: Para A, B conjuntos, se define el conjunto de todas las funciones de A en B:
  $$B^A := \{f \colon A \to B \mid f \text{ es función}\}$$

De las propiedades mostradas, pueden ver que la intersección "se porta mejor" que la unión.